



Lidia Pawlusińska

<https://orcid.org/0000-0003-0311-9755>

e-mail: [lidia.pawlusinska@usz.edu.pl](mailto:lidia.pawlusinska@usz.edu.pl)

Uniwersytet Szczeciński

# Konstruowanie zajęć ukierunkowanych na odkrywanie wiedzy matematycznej: koncepcje studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej

## Developing Guided-Discovery Activities to Support Mathematical Learning: Concepts by Preschool and Early School Pedagogy Students

### KEYWORDS

early school education, mathematical guided-discovery learning, didactic concepts of students

### ABSTRACT

The search for teaching methods facilitating more effective learning of mathematics is one of the challenges faced by contemporary education. Even though semantically effectiveness is closer to economic notions, the term can also be applied when assessing the school learning process. In defining what we believe to be the tell-tale signs of effective learning of mathematics, our attention has been drawn to developing skills facilitating a broad application of knowledge specific to this discipline within and also outside of its scope. Guided discovery is a method that enables pupils to construct mathematical knowledge while improving their understanding thereof. The present study aimed to discover the concepts students of preschool and early school education have for constructing guided-discovery lessons to support mathematical learning, as well as their opinions on the attractiveness and usefulness of the suggested solutions. Quantitative and qualitative analyses of student proposed lesson plans and questionnaire results indicate difficulties in designing lessons using this method while recognising their educational value.

**SŁOWA KLUCZE**

edukacja  
wczesnoszkolna,  
nauczanie  
ukierunkowane na  
odkrywanie wiedzy  
matematycznej,  
konceptje  
dydaktyczne  
studentów

**ABSTRAKT**

Poszukiwanie metod nauczania matematyki umożliwiających poprawę efektywności kształcenia tego przedmiotu jest jednym z wyzwań współczesnej edukacji. Efektywność, mimo że w swej semantyce bliższa jest kategoriom ekonomicznym, to jednak może odnosić się do oceny szkolnego procesu kształcenia. To właśnie określenie tego, co według nas świadczy o efektywności nauczania matematyki, kieruje naszą uwagę w stronę kształtowania umiejętności pozwalających na szerokie zastosowanie osiągnięć tej dziedziny w jej zakresie, ale także poza nią. Jedną z metod, która umożliwia uczniom konstruowanie wiedzy matematycznej przy jednoczesnym pogłębianiu rozumienia, jest kierowane odkrywanie. Niniejsze badanie miało na celu poznanie koncepcji studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej w zakresie konstruowania lekcji metodą nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy matematycznej, a także ich opinii na temat atrakcyjności i użyteczności proponowanego rozwiązania. Analiza ilościowa i jakościowa scenariuszy studenckich i wyników ankiet wskazuje na trudności w zakresie projektowania lekcji tą metodą przy jednoczesnym dostrzeganiu jej walorów edukacyjnych.

**Wstęp**

Najmłodszy uczniowie spotykają się z matematyką na długo przed rozpoczęciem nauki w szkole. Dziecięce doświadczanie matematyki odbywa się poprzez uczestnictwo w różnych sytuacjach życia codziennego. Obejmuje nie tylko posługiwanie się małymi liczbami, rozpoznawanie kształtów czy selekcjonowanie obiektów, dotyczy również dziecięcych prób opisywania dostrzeżonych regularności. Wszystkie te czynności są dla dzieci naturalne i nie kojarzą im się z obowiązkiem nauki. Taki stan zawdzięczamy powszechnej obecności matematyki w naszej kulturze. Niestety w praktyce edukacyjnej możemy zaobserwować, że to, co początkowo dzieciom wydaje się naturalne, poprzez szkolne nauczanie staje się trudne, oderwane od codziennych zdarzeń i często bywa źródłem wielu trudności związanych z uczeniem się matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012). Taka sytuacja zwraca naszą uwagę na konieczność poszukiwania właściwych rozwiązań dydaktycznych, które będą uwzględniały różnorodne potrzeby edukacyjne uczniów, podkreślały użyteczność matematyki, umożliwiały dostrzeganie pojawiających się w trakcie uczenia się trudności i wczesne interweniowanie. Poszukujemy rozwiązań dydaktycznych, które będą motywowały do podejmowania wyzwań intelektualnych oraz umożliwiały uczącym się świadome i aktywne konstruowanie wiedzy matematycznej.

## Uczenie się matematyki poprzez odkrywanie

W kształceniu matematycznym bardzo ważne są wszystkie te metody, które umożliwiają uczniom samodzielne konstruowanie wiedzy, rozwijają procesy analityczne i metapoznawcze, wyzwalają kreatywność, usprawniają ich w rozwiązywaniu problemów i umożliwiają im dostrzeganie jej rozległych zastosowań w wielu sytuacjach życia codziennego. Zatem matematyka postrzegana jako poszukiwanie i opisywanie regularności ukierunkowuje praktykę edukacyjną na konstruowanie sytuacji dydaktycznych, które ułatwiają uczniom dokonywanie odkryć w jej zakresie. To właśnie odkrywanie praw, reguł, związków i zależności uznano za wartościowy sposób rozwijania matematycznego myślenia i rozumowania (Zazkis i Liljedahl, 2002; English, 2004; Clements i Sarama, 2009). Niejednokrotnie w literaturze pojawia się stwierdzenie, że dzieci od najmłodszych lat powinny badać, odkrywać, porównywać i opisywać matematyczne regularności (Clements, 2001; Frobisher i Threlfall, 2005; Garrick i in., 2005; McGarvey, 2012; Kalinowska, 2017). Takie możliwości daje właśnie uczenie się przez odkrywanie, które wpisuje się w grupę metod heurystycznych (Bereźnicki, 2004, s. 318).

Tematyką związaną z uczeniem się przez odkrywanie zajmowało się wielu naukowców, a sformułowane na podstawie badań empirycznych wnioski wskazują pozytywne efekty pracy tą metodą w sferze poznawczej, emocjonalno-wolicjonalnej i psychomotorycznej (Kamaluddin i Widjajanti, 2019). Wśród najbardziej znaczących walorów w kontekście wspierania rozwoju kompetencji matematycznych uczniów wskazano samodzielne dochodzenie do wiedzy, możliwość analizy wielu dróg prowadzących do rozwiązania zadań oraz kształtowanie umiejętności uczenia się, co skutkuje usamodzielnianiem intelektualnym uczniów (Liljedahl, 2005). Niewątpliwie zaletami uczenia się matematyki poprzez odkrywanie jest rozwijanie gotowości do inicjowania i modyfikowania różnych sposobów działania (Dixon, 2005; Kapur i Toh, 2013; Mason i in., 2005). Wśród kolejnych możemy wyróżnić zmianę, która dokonuje się w obrębie uczniowskich postaw wobec matematyki i siebie jako osoby podejmującej się rozwiązania zadania (Svinicki, 1998) czy wzrost atrakcyjności zajęć szkolnych, który przekłada się na wzrost dziecięcego zaangażowania się w to, co dzieje się na lekcji (Carroll i Beman, 2015). Aktywne działanie towarzyszące uczeniu się poprzez odkrywanie ma szansę wzmocnić nie tylko uczniowskie poczucie własnej skuteczności, ale zwraca uwagę na potrzebę właściwej organizacji informacji, planowanie rozwiązania, a przede wszystkim weryfikację uzyskanych rezultatów. Kształtująca się zdolność do przekształcania i weryfikowania informacji rozwija umiejętność rozważania wielu dróg prowadzących do rozwiązania zadań, a to z kolei, zdaniem Lockharta (2009), wspiera rozwój krytycznego myślenia. Odkrywanie, któremu zawsze towarzyszą silne emocje, pozostawia trwałe ślady w pamięci i ułatwia dostęp do

przechowywanych w niej informacji (Svinicki, 1998; Westwood, 2008). Natomiast ich częsta reorganizacja powoduje, że stają się materiałem stale aktualnym. Praca tą metodą stwarza uczniom możliwość wytwarzania i rozwijania pomysłów, a także korygowania uzyskanych rezultatów. W konsekwencji wzrasta uczniowska samodzielność w zakresie tworzenia bardziej ekonomicznych strategii rozwiązywania problemów (Boaler, 2016; Gopnik i in., 2004; Lu i in., 2014). Właściwie skonstruowane zadania stają się wyzwaniem edukacyjnym z dominacją takich aktywności matematycznych, jak: dostrzeganie prawidłowości, regularności i powiązań, porównywanie, organizowanie i reorganizowanie dotychczas zgromadzonych informacji czy wnioskowanie i formułowanie przypuszczeń (hipotez) (Maarif, 2016; Yurniwati i Hanum, 2017). Ważnym aspektem pracy tą metodą jest możliwość dyskusowania z rówieśnikami na temat własnych spostrzeżeń, co wspiera umiejętność posługiwania się językiem matematycznym. Wzbogacanie natomiast wypowiedzi o kolejne pojęcia matematyczne oraz umiejętność opisu następujących po sobie operacji matematycznych pogłębia rozumienie matematyki (Maarif, 2016). Kolejnym ważnym aspektem uczniowskich dyskusji nad rozwiązaniem zadań jest także rozwijanie umiejętności oceny własnych działań, porównywanie uzyskanych efektów oraz poszukiwanie innych możliwych rozwiązań. Tak właśnie kształtuje się postawa refleksyjnego odkrywcy matematyki, w której dyskusja na argumenty wyrabia nawyk sprawdzania z warunkami zadania przyjętej strategii rozwiązania oraz uzyskanego rezultatu.

Niepodważalnym argumentem przemawiającym za stosowaniem proponowanego rozwiązania jest wzrost osiągnięć w nauce (Moore, 2005; Amiyani i Widjajanti, 2018), lepsze rozumienie pojęć matematycznych (Maarif, 2016), rozwijanie wyższych poziomów myślenia poznawczego (Yuliani i Saragih, 2015; Amiyani i Widjajanti, 2018) oraz wzrost umiejętności w zakresie samoregulacji uczenia się (Fauzi i Widjajanti, 2018). Konkludując, uczenie się poprzez odkrywanie uznano za skuteczniejsze od nauczania skupionego na transmisji wiedzy i dostrzeżono jego walory w rozwijaniu zdolności matematycznych uczniów (Sahara i in., 2018).

## Kierowanie uczeniem się poprzez odkrywanie

Mimo że sednem uczenia się poprzez odkrywanie jest konstruowanie przez uczniów własnych znaczeń, to pozostawienie ich bez wsparcia byłoby błędem (Mayer, 2004; Lazonder i Harmsen, 2016; Abrahamson i Kapur, 2018). W praktyce szkolnej takiemu uczeniu się będzie odpowiadać nauczanie ukierunkowane na odkrywanie wiedzy matematycznej. Zaliczamy je do kategorii metod nauczania problemowego i tak jak one koncentruje się na kierowaniu procesem rozwiązywania zagadnień praktycznych i teoretycznych przy udziale aktywności badawczej uczniów (Okoń, 2001).

Celem uczniowskiej aktywności staje się sprostanie wyzwaniu postawionemu przez nauczyciela, które ma uczniów inspirować do rozpatrywania obiektów w nowych układach, opisanych za pomocą niedostrzeganych dotąd relacji oraz ujawniających inne niedostrzegane dotąd własności. To właśnie wtedy dochodzi do konieczności spojrzenia na wiedzę matematyczną w nowym ujęciu, w nowych kontekstach. Owe spostrzeżenia dzieci są przez nie same porządkowane i prezentowane w nowej formie. Prowadzi to nie tylko do rozumienia na wyższym poziomie (Van Joolingen, 1999), ale również wzmacnia uczniów w pokonywaniu trudności podczas uczenia się (Kirschner i in., 2006). W tym podejściu do nauczania nowe pojęcie, nowa reguła czy nowa własność są zwieńczeniem wysiłków intelektualnych uczniów. A wszystko po to, by sformułowana przez nich wiedza dostarczyła narzędzi do rozwiązywania kolejnych zadań i przewyższania kolejnych wyzwań matematycznych.

Przyjmijmy zatem, że nauczanie ukierunkowane na odkrywanie wiedzy matematycznej polega na takiej organizacji zajęć dydaktycznych, której celem jest stworzenie uczniom warunków do budowania własnej wiedzy na podstawie serii danych lub informacji uzyskanych w wyniku przeprowadzonych przez nich obserwacji i eksperymentów (Hanum, 2018). Postawione przez nauczyciela na początku zajęć wyzwanie matematyczne ma prowokować i angażować uczniów do formułowania pytań, stawiania i weryfikowania hipotez oraz poszukiwania rozwiązań na drodze heurystyk analitycznych oraz intuicyjnych. Sama konstrukcja lekcji, tak jak proces rozwiązywania problemów, charakteryzuje się pewną etapowością (Galant, 1987, s. 94). Na początku zajęć głównym zadaniem nauczyciela jest zaangażowanie uczniów i skupienie ich uwagi na poszukiwaniach. Następnie aranżujemy wspólne gromadzenie informacji na temat tego, co uczniowie już wiedzą w danym obszarze poszukiwań. Po czym w grupach przystępują do pracy nad rozwiązaniem zadania. Zarówno podczas rozwiązywania zadania, jak i podczas prezentacji uzyskanych wyników dzielą się swoimi spostrzeżeniami i wspólnie formułują nową dla nich wiedzę. Sens odkrywaniu nowej wiedzy nadaje ostatni etap lekcji, tj. sprawdzenie, gdzie i jak mogą wykorzystać to, co właśnie odkryli. Zaproponowany tok lekcji przypomina etapy procesu badawczego i tak w kontekście edukacji matematycznej może być traktowany. Na koniec warto podkreślić, że nieodzownym walorem lekcji w tym podejściu staje się uruchomienie przestrzeni komunikacji, która za sprawą rozmów o planowanych i podejmowanych działaniach czy wymiany spostrzeżeń pobudza uczniów do refleksji, pozwala lepiej zrozumieć rozpatrywane zagadnienie oraz umożliwia dokonanie oglądu rozpatrywanego zagadnienia z różnych perspektyw poznawczych. To właśnie w toku społecznej wymiany poprzez negocjacje i współpracę zachodzi konstruowanie indywidualnej wiedzy (De Corte, 2013, s. 89).

Najważniejszym elementem konstrukcyjnym takiej lekcji jest zadanie, którego rozwiązanie ma doprowadzić uczniów do nowej dla nich wiedzy matematycznej. Zadania

na odkrywanie (ang. *guidem-discovery tasks*) różnią się od zadań badawczych (ang. *investigative tasks*) i problemowych (ang. *problem-solving tasks*). W przypadku odkrywania zadania mają dobrze określony cel, a treść zawiera niezbędne wskazówki kierujące uczniów do jego osiągnięcia. Tu, nie tak jak w przypadku zadań badawczych, efekt końcowy jest bardziej przewidywalny (Yeo, 2017). Z tego właśnie powodu Jaworski (1994) uznaje, że odkrywanie zasadniczo różni się od procesu badawczego i porównuje je do wyznaczania szlaku do z góry zaplanowanego przez nauczyciela miejsca.

## Metodologia

Metodę uczenia się poprzez odkrywanie zaprezentowałam studentom podczas wykładu, po czym zaprosiłam ich do uczestnictwa w lekcji, na której wcielili się w rolę uczniów i odkrywali nierówność trójkąta. Po lekcji demonstracyjnej wywiązała się dyskusja, w trakcie której studenci mogli zadawać pytania pozwalające wyjaśnić im wątpliwości i utwierdzić się w przekonaniu, że rzeczywiście rozumieją, na czym polega proponowane rozwiązanie dydaktyczne. Jednak poczucie rozumienia nie jest tożsame z umiejętnością zaprojektowania lekcji. Dlatego postanowiłam przeprowadzić badania.

Celem głównym badań było rozpoznanie koncepcji studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej w zakresie konstruowania lekcji matematyki omawianą metodą oraz ich refleksyjna interpretacja. Zależało mi na zrekonstruowaniu studenckich wyobrażeń o tym, jak powinna przebiegać taka lekcja, które treści matematyczne wyróżniono do jej realizacji oraz jakie zadania prowadzące uczniów do odkrywania wiedzy matematycznej proponują. Ponadto chciałam poznać opinię studentów na temat takiej organizacji lekcji. Jest to ważny aspekt pracy zawodowej nauczyciela, bo między innymi od indywidualnego stosunku do proponowanego rozwiązania dydaktycznego zależy jego częstotliwość występowania w praktyce edukacyjnej.

Sformułowałam następujące pytania badawcze:

1. Jakimi koncepcjami w zakresie projektowania lekcji matematyki metodą nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy posługują się studenci pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej?
2. Jakie treści matematyczne studenci uważają za adekwatne do realizacji metodą nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy?
3. Jakie etapy pracy uczniów podczas lekcji realizowanej metodą nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy matematycznej uwzględniają studenci w swoich scenariuszach?

4. W jaki sposób konstruuje zadania ukierunkowane na odkrywanie wiedzy matematycznej?
5. Jakie są opinie studentów na temat metody nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy matematycznej?

Badanie podzielono na dwa etapy. Pierwszy obejmował napisanie scenariusza lekcji matematyki, na której uczniowie edukacji wczesnoszkolnej będą odkrywali wiedzę matematyczną. Na drugim studenci wypełniali krótką ankietę gromadzącą opinie na temat użyteczności i atrakcyjności proponowanego rozwiązania dydaktycznego oraz odpowiadali na pytanie dotyczące ich własnych doświadczeń szkolnych. W badaniu uwzględniono podejście ilościowe i jakościowe do zgromadzonych informacji. W badaniach ilościowych wykorzystano 5-stopniową skalę Likerta (Babbie, 2003), a analizę rzetelności kwestionariusza ankiety wykonano w programie Statistica 13.1. Podczas analizy studenckich scenariuszy zajęć skoncentrowano się na podejściu jakościowym, a dokładniej na analizie treści (Pilch i Bauman, 2011, s. 350–354). Wyróżniono kilka aspektów, tj. studenckie wybory treści matematycznych przeznaczone do realizacji tą metodą, etapy pracy uczniów uwzględniane w konstrukcji lekcji oraz konstrukcje zadań stanowiących podstawę uczniowskich poszukiwań. Wyróżnione w pracach studentów etapy lekcji dodatkowo poddano analizie ilościowej, określając częstotliwość ich występowania w scenariuszach zajęć.

W badaniach wzięło udział 184 studentów kierunku pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna. Przeprowadzono je od marca do maja w latach 2021 i 2022.

## Analiza i wyniki badań

### Preferencje studentów w zakresie tematyki zajęć

Pozostawienie studentom wyboru tematyki zajęć nie było działaniem przypadkowym. Zależało mi na określeniu zakresu treści matematycznych, w których badani odnajdują zastosowanie omawianej metody. Analiza prac studentów wykazała, że jej zastosowań doszukiwano się przede wszystkim w prawach i regułach matematycznych, a w szczególności: przemienności dodawania (53 scenariusze) albo przemienności mnożenia (45 scenariuszy), łączności mnożenia (18 scenariuszy) albo dodawania (22 scenariusze), a także rozdzielności mnożenia względem dodawania (19 scenariuszy). Nieliczne prace uwzględniały kształtowanie pojęć matematycznych, tj. obwód wielokąta (5 scenariuszy), jednostki ciężaru i długości (9 scenariuszy). Niektóre z nich dotyczyły własności liczb parzystych lub nieparzystych (7 scenariuszy) czy figur geometrycznych (3 scenariusze). Wśród propozycji studentów znalazły się też takie, jak: „Z faktu, że coś ma większy rozmiar, nie wynika, że jest cięższe” (1 scenariusz) lub „Czym większą jednostkę pomiaru przyjmujemy do opisanie pewnej wielkości danego

obiektu, tym mniejszy wynik liczbowy uzyskamy” (2 scenariusze). Studenckie wybory wskazują, że tematyka uwzględniona w scenariuszach koncentruje się przede wszystkim na zagadnieniach matematycznych wprost zapisanych w podstawie programowej kształcenia ogólnego. Niestety studenci nie uwzględnili treści propedeutycznych, których zadaniem jest przygotowanie uczniów do pojęć zaplanowanych do kształtowania w klasach starszych oraz takich, które wykorzystujemy do stymulacji rozwoju umysłowego uczniów.

### Preferencje studentów w zakresie planowanych czynności uczniów

Scenariusze zajęć przygotowane przez studentów miały opisywać planowane działania uczniów, zaś rolą nauczyciela miało być wspieranie uczniów w dokonywaniu odkryć. Wśród głównych zadań nauczyciela w tym podejściu możemy wyróżnić: stawianie przed uczniami zadań, których konstrukcja pozwoli na dostrzeżenie i sformułowanie nowej wiedzy, angażowanie uczniów w pracę na lekcji i podtrzymywanie ich ciekawości poznawczej, w tym także inspirowanie do zadawania pytań i tworzenia uogólnień (Dylak, 2000, s. 71–72). Całość powinno więc ukazywać użyteczności nowo skonstruowanej przez uczniów wiedzy.

Wyniki analizy studenckich scenariuszy zaprezentowano w formie tabeli, która wyróżnia sześć kluczowych etapów lekcji (Pawlusińska, 2021, s. 100–107) i opisuje rozwiązania zaproponowane przez studentów. Ostatnia kolumna tabeli określa procent scenariuszy, w których zidentyfikowano wyróżnione rozwiązanie.

Tabela 1. Studenckie koncepcje zawarte w scenariuszach zajęć

<b>Etap lekcji</b>	<b>Propozycje studentów zawarte w scenariuszach lekcji</b>	<b>Wskaźnik procentowy</b>
BUDOWANIE PRZESTRZENI UCZNIOWSKICH POSZUKIWAŃ	Wprowadzenie w tematykę lekcji poprzez pytania faktograficzne (Co to jest? Gdzie się z tym spotkaliście? Czy ktoś z Was wie, co to znaczy?)	19%
	Wprowadzenie w tematykę lekcji poprzez pytania proceduralne (W jaki sposób należy obliczyć? Jak wykonać?)	14%
	Zagadki matematyczne, gry i zabawy obejmujące zakresem wcześniej poznane przez uczniów treści matematyczne	6%
	„Rozgrzewka matematyczna”, np. seria krótkich przykładów do obliczenia	24%
	Pominięto w scenariuszu	37%



Etap lekcji	Propozycje studentów zawarte w scenariuszach lekcji	Wskaźnik procentowy
ANGAŻOWANIE UCZNIÓW	Przedstawienie celu lekcji za pomocą pytań hipotetycznych (Co się dalej stanie? Co będzie następne? Jaki będzie kolejny element?)	32%
	Przedstawienie celu lekcji za pomocą pytań przypuszczających (Dlaczego coś się dzieje? Do czego to służy?)	23%
	Przedstawienie celu lekcji za pomocą pytań spekulatywnych (Jak myślicie, co się stanie gdy...? Co się zdarzy, jeśli...?)	3%
	Pominięto w scenariuszu	42%
TYPY ZADAŃ	Zadania na odkrywanie (ang. <i>guidem-discovery tasks</i> )	19%
	Zadania proceduralne (ang. <i>procedural tasks</i> )	81%
PREZENTACJA UZYSKANYCH REZULTATÓW	Przedstawienie wyników i uczniowska dyskusja o uzyskanych rezultatach	62%
	Uczniowska prezentacja uzyskanych rezultatów i ich nauczycielska ocena	38%
FORMUŁOWANIE NOWEJ WIEDZY	Formułowanie nowej wiedzy (reguły, własności, definicji...) przez uczniów	57%
	Podanie nowej wiedzy (reguły, własności, definicji...) przez nauczyciela	32%
	Pominięto w scenariuszu	11%
POSZUKIWANIE ZASTOSOWAŃ DLA NOWEGO ODKRYCIA	Rozwiązywanie zadań z podręcznika i materiałów ćwiczeniowych	24%
	Uczniowie budują własne przykłady zadań, w których mogą wykorzystać swoje odkrycie	15%
	Uczniowie poszukują zastosowań odkrytej wiedzy w życiu codziennym	9%
	Przedłużanie uczniowskich poszukiwań, czyli co się stanie, gdy zmienimy warunki w zadaniu (np. Czy dla trzech i więcej liczb odkryta własność też zachodzi?)	4%
	Pominięto w scenariuszu	48%

Źródło: opracowanie własne.

Gromadzenie informacji o dotychczasowych doświadczeniach uczniów jest ważne z dwóch powodów. Pierwszym jest zebranie informacji na temat aktualnej wiedzy uczniów i jej źródeł, drugi to konieczność budowania płaszczyzny poszukiwań do pracy nad nowym zagadnieniem. Dlatego zwróciłam uwagę na to, w jaki sposób studenci planują wykorzystać dotychczasową wiedzę uczniów oraz w jaki sposób angażują uczniów w poszukiwania nowej. Analiza studenckich scenariuszy zajęć pokazała, że nie wszystkie prace uwzględniają te etapy lekcji. Aż w 37% scenariuszy pominięto etap gromadzenia informacji o doświadczeniach uczniów. W pozostałych były to pytania obejmujące bazowe cechy obiektów matematycznych (pytania faktograficzne 19%) oraz dotyczących sposobów obliczeń czy sposobów wyznaczania pewnych wielkości (pytania proceduralne 14%). W pozostałych 30% scenariuszy planowano tzw. „rozgrzewki matematyczne” polegające na pamięciowym rachowaniu przykładów jedno-działaniowych podanych przez nauczyciela (24% scenariuszy) oraz krótkie gry dydaktyczne lub zagadki (6% scenariuszy), np.:

Temat: Przemienność dodawania.

Zagadka: Kasia i Tomek w parku zbierali kasztany i żołądź. Po powrocie do domu okazało się, że Kasia zebrała 9 kasztanów, a Tomek 8 żołądź. Przed umieszczeniem ich w pudełku postanowili je policzyć. Kasia do swoich kasztanów dodała żołądź Tomka i otrzymała 16. Tomek do swoich żołądź dodał kasztany Kasi i otrzymał 18. Jak to możliwe? (studencki projekt lekcji).

Zaplanowane działania mające na celu angażowanie uczniów w poszukiwania również zamierzano realizować za pomocą pytań. Jednak w tym przypadku dominowały pytania hipotetyczne (32%), przypuszczające (23%) oraz spekulatywne (3%). Tych ostatnich było bardzo niewiele, a przecież ich rola w przedłużaniu uczniowskich poszukiwań była już wskazywana przez Wittmanna w drugiej połowie ubiegłego stulecia (Krygowska, 1977). Niestety również w tym przypadku cztery na dziesięć studenckich scenariuszy nie uwzględniały tego etapu lekcji.

Analizując pytania zaproponowane przez studentów w kontekście „myślenia pytajnego”, dostrzegamy, że wśród propozycji studentów wystąpiły pytania ze wszystkich trzech poziomów, tj. gromadzenia informacji (33% scenariuszy), organizowania informacji (23% scenariuszy) oraz tworzenia i rozwijania informacji (35% scenariuszy) (Szmidt, 2006). Pytania z poziomu gromadzenia informacji wystąpiły na pierwszym etapie, tj. wtedy, gdy studenci planowali zebrać informacje na temat dotychczasowych doświadczeń uczniów. Natomiast pytania z zakresu organizowania, tworzenia i rozwijania informacji zaplanowano na tę część lekcji, której zadaniem było angażowanie uczniów w poszukiwania.

Ważnym aspektem analizy scenariuszy było określenie, w jaki sposób studenci konstruują zadania, które mają prowadzić do odkrycia nowej wiedzy. W tym celu przeanalizowano zadania zawarte w scenariuszach oraz pomoce dydaktyczne, które miały wspierać w dokonywaniu odkryć matematycznych. Ponadto interesowało mnie, które formy organizacyjne pracy zamierzali wykorzystać studenci w tej części lekcji.

Wszystkie scenariusze studentów wyraźnie wskazywały, że ta część lekcji zawsze planowana była jako praca w niewielkich 3–4-osobowych grupach. Zadaniem uczniów było wspólne rozwiązanie zadania lub zestawu zadań i przygotowanie się do prezentacji uzyskanych rezultatów na forum klasy. To podczas pracy w grupach planowano prowadzenie uczniowskich rozmów, które miały być okazją do wymiany indywidualnych spostrzeżeń oraz do wypracowania wspólnego stanowiska w sprawie rozwiązania zadań.

Wśród zadań zaproponowanych przez studentów wyróżniłam te, które sprzyjają pracy twórczej uczniów, czyli zadania na odkrywanie oraz odwołujące się do znanych uczniom procedur postępowania. Zadania pierwszego typu Yeo (2017) zalicza do bogatych matematycznie. Ich bogactwa doszukuje się w prowokowaniu sytuacji dydaktycznych, które nie tylko wymuszają nieschematyczne postępowanie, ale również zapewniają uczniom możliwość poznania nowych treści matematycznych, rozwijając przy tym tak ważne procesy, jak umiejętności analityczne, kreatywność i metapoznanie. Natomiast zadania proceduralne, zawarte w propozycjach studentów, koncentrowały się na ćwiczeniu sprawności matematycznej, tj. biegłości rachunkowej czy pamięciowego opanowania algorytmu. To właśnie za ich pomocą studenci planowali pokierować uczniów tak, aby dokonali uogólnienia, np. określającego nadrzędność dwóch znanych im pojęć (Każdy kwadrat jest prostokątem, ale nie każdy prostokąt jest kwadratem). Bardzo często zadania proceduralne poprzedzano nauczycielską prezentacją tego, co uczniowie mieli odkryć, by następnie rozwiązywać zadanie w zaprezentowany sposób.

Do grupy zadań na odkrywanie zaliczałam te, których celem było odkrycie reguły, własności, definicji czy zależności między obiektami matematycznymi, np.:

Wyznacz kilka sum dwóch lub trzech dowolnie wybranych liczb parzystych, a następnie przyjrzyj się uważnie otrzymanym wynikom. Jakie liczby otrzymaliście w wyniku dodawania? Opisz własnymi słowami dostrzeżoną regułę (studencki projekt lekcji).

Celem w zacytowanym przykładzie jest reguła, która mówi, że suma liczb parzystych jest liczbą parzystą. Natomiast wskazówkami prowadzącymi do celu: wyznaczenie kilku sum liczb parzystych oraz przyjrzenie się uważnie wynikom. Myślę, że wartościowszym rozwiązaniem byłoby następujące zadanie: „Jak myślisz, czy suma dowolnych liczb parzystych będzie liczbą nieparzystą? Uzasadnij swoją odpowiedź”. Tu

cel pozostaje bez zmian, ale wskazówki pozostawiają miejsce na większą kreatywność. Innym przykładem zadania zawartego w scenariuszach studenckich jest:

Kasia przygotowała zaproszenia na przyjęcie urodzinowe w kształcie wielokątów. Postanowiła do brzegów każdego z nich przykleić ozdobną tasiemkę. Ile tasiemki będzie potrzebowała Kasia, aby obkleić zaproszenia? W jaki sposób wyznaczyłeś potrzebną długość tasiemki? Zastanów się, czy istnieje sposób wyznaczenia potrzebnej długości tasiemki dla innego zestawu zaproszeń? (studencki projekt lekcji)

W przypadku tego zadania zaplanowano wykorzystać następujące pomoce dydaktyczne: przygotowane zaproszenia w kształcie kwadratu, prostokąta, trójkąta równobocznego, sześciokąta foremnego oraz czworokąta, pięciokąta i sześciokąta o różnych długościach boków, zawsze wyrażone w pełnych centymetrach (łączna suma obwodów tych wielokątów przekraczała długość 200 centymetrów) oraz tasiemkę długości 200 centymetrów. Takie rozwiązanie sugeruje, że nie wystarczy sprawdzić, ile z dołączonej do zestawu tasiemki zużyjemy, a raczej kieruje uwagę uczniów na wyznaczanie kolejnych obwodów, co jest istotą zajęć, na których należało sformułować pojęcie obwodu wielokąta.

Niestety we wszystkich studenckich scenariuszach zidentyfikowałam zaledwie 19% zadań, które nie tylko wskazują cel poszukiwań, ale również zawierają wyważoną liczbę wskazówek prowadzących uczniów do formułowania uogólnień w postaci nowego pojęcia, reguły czy własności. Tę grupę scenariuszy poddałam dodatkowej analizie, której celem było określenie stopnia realizacji pozostałych etapów wyróżnionych w konstrukcji lekcji. W każdym z tych scenariuszy uwzględniono pięć pierwszych etapów lekcji, natomiast w dwóch z nich zabrakło poszukiwań zastosowań dla nowego odkrycia. Jednak uznaję to za mniej znaczący błąd konstrukcyjny lekcji niż ten, w którym źle zaprojektowano zadania na odkrywanie.

Na każdej z zaproponowanych lekcji, bez względu na typ zamieszczonego zadania, studenci planowali wykorzystywać pomoce dydaktyczne, np.: klocki Cuisenaire'a, tablice dziesiątkowe, klocki Lego, liczmany, miarki, linijki, modele figur geometrycznych, wagi szalkowe i wiele innych. Wszystkie były właściwie dobrane do tematu zajęć. Różnica polegała na tym, że w przypadku lekcji, na których uczniowie rzeczywiście badali, doświadczali, porównywali czy budowali modele matematyczne, pomoce dydaktyczne były wykorzystywane przez nich samych, natomiast w scenariuszach zawierających zadania proceduralne pomoce dydaktyczne były zazwyczaj wykorzystywane do demonstracji.

Wspólna dyskusja o uzyskanych wynikach to kolejny ważny element pracy tą metodą. Moment dyskusji o uzyskanych rezultatach i formułowanie nowej wiedzy powinny finalizować wysiłki podejmowane przez uczniów. W studenckich scenariuszach

wykorzystano tylko dwa rozwiązania. Najczęściej były to prezentacja wyników pracy w grupach oraz zaplanowana dyskusja (62%), którą miały wspierać pytania nauczyciela, np. „Czy wszystkie grupy uzyskały takie same wyniki? Co podczas rozwiązywania zadania było dla Was najtrudniejsze? Co nakierowało Was na wybór takiego rozwiązania?”. Drugi ze sposobów również zaczynał się prezentacją wyników, jednak kończył nauczycielską oceną uzyskanych rezultatów (38%). Wskazuje to na dominujące w tradycyjnym podejściu do nauczania postrzeganie roli nauczyciela jako jedynego i najbardziej wiarygodnego źródła wiedzy. Taka finalizacja pracy metodą odkrywania powoduje, że aktywność uczniów zostaje sprowadzona do rozwiązywania zadań bez ich emocjonalnego zaangażowania, tak ważnego dla kształtowania nowej wiedzy. Rozwiązania zastosowane na tym etapie rzutowały na kolejny, czyli samodzielne formułowanie wiedzy. Okazuje się, że na etapie, którego jednym z głównych zadań jest kształtowanie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym, aż 11% projektów studenckich tego nie uwzględnia, a w 32% nową wiedzę formułuje nauczyciel. Znaczącym mankamentem studenckich projektów było przekonanie, że uczniowie sformułują nową wiedzę, rozwiązując zadania proceduralne, a tak założono w 123 scenariuszach.

Aby pokazać użyteczność nowej wiedzy, warto wskazać jej wykorzystanie w praktyce. Uznaję ten etap za wieńczący cały proces odkrywania. Jednak w tym przypadku najczęściej planowano rozwiązywać zadania zaczerpnięte z podręczników lub zeszytów ćwiczeń (24%). Dotyczyły zazwyczaj sytuacji stworzonych na potrzeby omawianych treści matematycznych i nie łączyły wiedzy szkolnej z sytuacjami spotykanymi w życiu codziennym. Wartościowszym rozwiązaniem dydaktycznym były propozycje studentów, w których uczniowie sami budowali przykłady zadań na wykorzystanie nowo odkrytej wiedzy (15%) lub poszukiwali jej zastosowań w życiu codziennym (9%). Były też takie, w których zamiast poszukiwać użyteczności nowo odkrytej wiedzy planowano przedłużać uczniowskie zaangażowanie poprzez zmiany warunków zadania, np. w przypadku przemienności dodawania czy mnożenia zaplanowano, aby uczniowie sprawdzili odkrytą własności dla większej liczby składników albo czynników.

### Opinie studentów na temat metody nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy matematycznej

Bardzo zależało mi na poznaniu opinii studentów na temat skuteczności i atrakcyjności proponowanej metody w nauczaniu matematyki we wczesnej edukacji. W poniższej tabeli przedstawiono wskazania studentów w zakresie czterech stwierdzeń.

Tabela 2. Opinie studentów na temat metody nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wiedzy matematycznej

Stwierdzenie	Czy zgadza się Pani/Pan z następującym stwierdzeniem? (dane w % zaokrąglone do pierwszego miejsca po przecinku)					Miary	
	zdecydowanie tak	raczej tak	trudno powiedzieć	raczej nie	zdecydowanie nie	średnie	odch. stand.
Metoda nauczania ukierunkowanego na odkrywanie pozwoli uatrakcyjnić lekcję matematyki.	57,6	20,7	15,8	6,0	0	4,30	0,94
Metoda nauczania ukierunkowanego na odkrywanie wyzwoła w uczniach przekonanie, że mogą uczyć się matematyki z powodzeniem.	15,8	21,7	32,1	20,1	10,3	3,13	1,21
Metoda nauczania ukierunkowanego na odkrywanie pozwala lepiej zrozumieć matematykę.	26,6	60,3	7,6	4,3	1,1	4,07	0,78
Warto poświęcać czas na odkrywanie matematyki przez uczniów, bo uważam, że nie wystarczy wszystko dobrze wytłumaczyć.	20,1	59,2	12,5	4,9	3,3	3,88	0,90

Wyniki procentowe wskazań studentów w wierszach 1 i 3 nie sumują się do 100, ponieważ ich wartości zostały zaokrąglone do pierwszego miejsca po przecinku. Przeprowadzona analiza rzetelności powyższych twierdzeń jest na poziomie zadowalającym, standaryzowany współczynnik Cronbacha wynosi 0,800243 (analizy dokonano w programie Statistica 13.1).

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie odpowiedzi zamieszczonych w ankietach możemy wnioskować, że w nauczaniu ukierunkowanym na odkrywanie wiedzy matematycznej studenci dostrzegają przede wszystkim uatrakcyjnienie lekcji matematyki. Ponadto w ich opinii

proponowane rozwiązanie dydaktyczne pozwoli lepiej zrozumieć matematykę. Najmniej przekonani byli do stwierdzenia dotyczącego wartości dodanej tej metody, czyli wyzwolenia w uczniach przekonania, że mogą uczyć się matematyki z powodzeniem. Jest to niezwykle istotne chociażby w kontekście społecznego uznania matematyki jako bardzo trudnej dziedziny, z którą radzą sobie tylko nieliczni. Uznanie z jednej strony wzrostu atrakcyjności zajęć matematycznych, możliwości pogłębiania rozumienia omawianych zagadnień matematycznych czy zmniejszonej mocy sprawczej nauczycielskich tłumaczeń w stosunku do samodzielnego odkrywania wiedzy matematycznej pozostaje w sprzeczności z brakiem pełnego przekonania studentów o sile oddziaływań na polu poczucia własnej skuteczności uczących się. Może to mieć związek z ich dotychczasową nauką, ponieważ odpowiedzi studentów na pytanie: „Czy podczas swoich lekcjach spotkali się z uczeniem poprzez odkrywanie wiedzy matematycznej?” jednoznacznie wskazały, że żadna z badanych osób nie pracowała tą metodą i nie ma w tym obszarze osobistych doświadczeń szkolnych (83,2% – zdecydowanie nie; 12% – raczej nie; trudno powiedzieć – 4,9%).

## Konkluzja

Analiza zgromadzonych scenariuszy studentów pokazuje, że organizowanie środowiska uczenia się metodą nauczania ukierunkowanego na odkrywanie nie jest łatwym zadaniem. Główną trudnością dostrzeżoną w studenckich scenariuszach jest brak umiejętności budowania zadań inspirujących uczniów do dokonywania odkryć, a to one w tym przypadku są podstawą lekcji. Proponowanej metody nie możemy również określić mianem intuicyjnej z dwóch powodów. Po pierwsze odpowiedzi studentów w ankiecie wskazują, że nie pracowali w taki sposób na swoich lekcjach matematyki, zatem pozbawieni są indywidualnych doświadczeń w tym zakresie. Po drugie zapoznanie studentów z metodą poprzez wprowadzenie teoretyczne i epizodyczne uczestnictwo w lekcji pokazowej nie zagwarantują sukcesu. Myślę, że warto w ramach kształcenia przedmiotowego studentów organizować zajęcia umożliwiające im doświadczanie metod, z którymi nie spotkali się podczas nauki szkolnej. Na pewno pozwoli to poszerzyć zakres ich kompetencji dydaktycznych. Ponadto zajęcia ze studentami rozwijające w nich postawy badawcze w zakresie matematyki mogą okazać się predyktorem poczucia własnej skuteczności matematycznej. Co wymaga dalszych badań i pogłębionej analizy.

## Bibliografia

Abrahamson, D. i Kapur, M. (2018). Reinventing discovery learning: A field-wide research program. *Instructional Science*, 46(1), 1–10.

- Amiyani, R. i Widjajanti, J.B. (2018). The excellence of guided discovery learning on mathematical knowledge-based, skill-based, and attitude. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097.
- Babbie, E. (2003). *Badania społeczne w praktyce* (W. Betkiewicz, tłum.). Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Bereźnicki, F. (2004). *Dydaktyka kształcenia ogólnego*. Oficyna Wydawnicza „Impuls”.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.
- Carroll, J. i Beman, V. (2015). Boys, inquiry learning and the power of choice in middle school English classroom. *Adolescent Success*, 15(1), 4–17.
- Clements, D.H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270–275.
- Clements, D.H. i Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- De Corte, E. (2013). Historyczny rozwój myślenia o uczeniu się (Z. Janowska, tłum.). W: H. Dumont, D. Istance, F. Benavides (red.), *Istota uczenia się. Wykorzystanie wyników badań w praktyce* (s. 60–108). Wolters Kluwer Polska.
- Dixon, J.A. (2005). Mathematical problem solving: The roles of exemplar, schema, and relational representations. W: J.I.D. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition*. (s. 379–396). Psychology Press.
- Dylak, S. (2000). Konstruktywizm jako obiecująca perspektywa kształcenia nauczycieli. W: H. Kwiatkowska, T. Lewowicki i S. Dylak (red.), *Współczesność a kształcenie nauczycieli* (s. 63–82). Wyższa Szkoła Pedagogiczna Związku Nauczycielstwa Polskiego.
- English, L.D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. W: L. English (red.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (s. 201–212). Lawrence Erlbaum Associates.
- Fauzi, A. i Widjajanti, D.B. (2018). Self-regulated learning: the effect on student's mathematics achievement. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097.
- Frobisher, L. i Threlfall, J. (2005). Teaching and assessing patterns in number in primary years. W: A. Orton A. (red.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (s. 84–103). Continuum.
- Galant, J. (1987). *Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów w klasach początkowych*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Garrick, R., Threlfall, J. i Orton, A. (2005). Pattern in the nursery. W: A. Orton (red.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (s. 1–17). Continuum.
- Gopnik, A., Meltzoff, A.N. i Kuhl, P.K. (2004). *Naukowiec w kołysce. Czego o umyśle uczą nas małe dzieci* (E. Haman i P. Jackowski, tłum.). Media Rodzina.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (red.). (2012). *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*. Nowa Era.
- Hanum, N. (2018). The difference student learning outcomes using discovery learning and inquiry learning in elementary school. *International Journal of Education*, 6(1), 1–9.



- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. Falmer Press.
- Kalinowska, A. (2017). Matematyczna aktywność badawcza uczniów klas początkowych. Między koncepcjami naukowymi i potocznymi. *Problemy Wczesnej Edukacji*, 38(3), 82–101.
- Kamaluddin, M. i Widjajanti, D.B. (2019). The impact of discovery learning on students' mathematics learning outcomes. *Journal of Physics: Conference Series*, 1320.
- Kapur, M. i Toh, P.L.L. (2013). Productive failure: From an experimental effect to a learning design. W: T. Plomp i N. Nieveen (red.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (s. 341–355). SLO.
- Kirschner, P.A., Sweller, J. i Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.
- Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki. Cz. 3*. Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.
- Lazonder, W. i Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681–718.
- Liljedahl, P.G. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! Experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2–3), 219–234.
- Lockhart, P. (2009). *Mathematician's lament*. Bellevue Literary Press.
- Lu, J., Bridges, S. i Hmelo-Silver, C.E. (2014). *Problem-based learning*. W: R.K. Sawyer (red.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (s. 298–318). Cambridge University Press.
- Maarif, S. (2016). Improving junior high school students' mathematical analogical ability using discovery learning method. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1), 114–124.
- Mason, J., Burton, L. i Stacey, K. (2005). *Matematyczne myślenie* (P. Amsterdamski, tłum.). Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Mayer, R.E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59(1), 14–19.
- McGarvey, L.M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 310–337.
- Moore, K.D. (2005). *Effective instructional strategies: From theory to practice*. SAGE Publications.
- Okoń, W. (2001). *Nowy słownik pedagogiczny*. Wydawnictwo Akademickie „Żak”.
- Pawlusińska, L. (2021). *Kierowane odkrywanie matematyki we wczesnej edukacji*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.
- Pilch, T. i Bauman, T. (2001). *Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe*. Wydawnictwo Akademickie „Żak”.
- Sahara, R., Mardiyana, M. i Saputro, D. (2018). Discovery learning with SAVI approach in geometry learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013.

- Svinicki, M.D. (1998). A theoretical foundation for discovery learning. *Advances in Physiology Education*, 275(6), S4–S7.
- Szmidt, K.J. (2006). Teoretyczne i metodyczne podstawy procesu rozwijania „myślenia pytajnego”. W: W. Limont i K. Nielek-Zawadzka, *Edukacja artystyczna a potencjał twórczy człowieka* (s. 21–50). Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Uniwersytet Mikołaja Kopernika.
- Van Joolingen, W. (1999). Cognitive tools for discovery learning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 10, 385–397.
- Westwood, P. (2008). *What teachers need to know about teaching methods*. ACER Press.
- Yeo, J.B.W. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 175–191.
- Yuliani, K. i Saragih, S. (2015). The development of learning devices based guided discovery model to improve understanding concept and critical thinking mathematical ability of students at Islamic Junior High School of Medan. *Journal of Education and Practice*, 6(24), 116–128.
- Yurniwati, Y. i Hanum, L. (2017). Improving mathematics achievement of Indonesian 5th grade students through guided discovery learning. *Journal on Mathematics Education*, 8(1), 77–84.
- Zazkis, R. i Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379–402.