

Izabella Kaiser

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Wydział Studiów Edukacyjnych

W poszukiwaniu modelu edukacji matematycznej. W stronę pedagogiki Marii Montessori

Searching for a Model of Mathematical Education: Towards Maria Montessori's Pedagogy

SŁOWA KLUCZOWE ABSTRAKT

edukacja matema-
tyczna, trudności
w uczeniu się mate-
matyki, pedagogika
Marii Montessori,
materiał rozwojowy,
trójstopniowa
lekcja nazw

Matematyka jest przedmiotem, który sprawia uczniom najwięcej problemów nieraz przez całe życie szkolne. Od lat obserwuje się na całym świecie niezadawalające wyniki nauczania tego przedmiotu, a brak lub zbyt niski poziom umiejętności matematycznych nie pozwala wielu uczniom sprostać rosnącym wymaganiom życiowym. Taka niepokojąca sytuacja implikuje podejmowanie ustawicznych prób modyfikacji i reformowania programów edukacji matematycznej zmierzających w kierunku większej ich skuteczności. W pracy podjęto problem trudności dzieci w uczeniu się matematyki. Zwrócono uwagę na rodzaje i skutki niepowodzeń w edukacji matematycznej. W kontekście tych zagadnień, jako alternatywę zakomenderowano edukację metodą M. Montessori. Omówiono główne założenia pedagogiki montessoriańskiej ze szczególnym uwzględnieniem materiału rozwojowego. Największą uwagę poświęcono materiałom sensorycznym i matematycznym, dokonując krótkiej ich charakterystyki oraz wskazując wysoką skuteczność edukacyjną. W celu przybliżenia specyfiki montessoriańskich form pracy ucznia przedstawiono trójstopniową lekcję nazw dotyczącą charakterystycznej dla metody Montessori pomocy rozwojowej, zwanej „złotym materiałem”. W zakończeniu wskazano efektywność dydaktyczną pedagogiki Montessori w obszarze edukacji matematycznej. Podkreślono, że uczniowie w placówkach montessoriańskich chętnie i samodzielnie

pracują z materiałami matematycznymi. Doświadczają sukcesów, nabywają nowe umiejętności i przekonują się, że matematyka może być łatwa i przyjemna.

KEYWORDS **ABSTRACT**

mathematics education, difficulties in learning mathematics, Maria Montessori's pedagogy, developmental material, three period lesson of names

Mathematics is a school subject which causes students the greatest problems, sometimes throughout their entire school experience. Unsatisfactory learning outcomes in mathematics have been observed worldwide for a number of years, and the lack of or poor mathematical skills make it impossible for many students to cope with the ever increasing demands of modern life. In view of this alarming situation, constant attempts are being made to modify and reform mathematics education curricula in order to improve their effectiveness. The present study explores the difficulties faced by students in learning mathematics. Attention is given to the types and effects of failures in mathematics education. In the context of these problems, the Montessori method is recommended as an alternative. The main assumptions of the Montessori pedagogy are presented, with a special emphasis on the development material. The greatest prominence is given to sensory and mathematical materials, providing their brief characterization and pointing to their high educational effectiveness.

In order to bring the characteristics of Montessori's organizational forms closer (forms of students' work) the three-stage-lesson is presented. The lesson involves presenting the names connected with the typical developmental Montessori method with the use of Golden Bead Material. The concluding section highlights the didactic effectiveness of Montessori pedagogy in the domain of mathematics education. It is stressed that students who have been educated in Montessori schools work eagerly with mathematical materials and independently. They achieve educational success, acquire new skills and see that mathematics can be easy and pleasant to learn.

Wprowadzenie

Uważa się, że współczesny wykształcony człowiek nie może funkcjonować bez elementarnej znajomości matematyki. Kompetencje matematyczne stanowią integralną część różnorodnych dziedzin, zawodów i sfer życia każdego człowieka. Posługują się nimi lekarze, ekonomiści, psychologowie, geografowie, przyrodnicy, genetycy, informatycy i wielu innych. J. Małkińska dodaje, że „matematyka jest przedmiotem,

który przede wszystkim uczy prawidłowego, logicznego myślenia i (...) nikt, a tym bardziej człowiek wykształcony nie może być zwolniony z myślenia”¹.

Niestety zjawiskiem rejestrowanym nie tylko w polskim szkolnictwie są niepowodzenia uczniów w nauce matematyki i ich niechęć wobec tej dziedziny wiedzy. Od lat obserwuje się niezadowalające wyniki nauczania tego przedmiotu. Z raportu Centralnej Komisji Egzaminacyjnej wynika, że szóstoklasiści piszący sprawdzian na zakończenie nauki w szkole podstawowej (obowiązujący do roku szkolnego 2015/2016) nie radzą sobie z zadaniami dotyczącymi wnioskowania i dostrzegania zależności. Mają także kłopoty z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych². Natomiast gimnazjaliści na egzaminie zewnętrznym w bardzo niskim stopniu wykazują umiejętność rozumowania matematycznego i wykorzystywania wiedzy w nietypowych sytuacjach. Prezentują, tak jak ich młodsi koledzy, małą sprawność w liczeniu. Ponadto nie potrafią rozwiązać zadań otwartych wymagających twórczego, niealgorytmicznego myślenia³.

D. Wood⁴ stwierdza kategorycznie, że frustracja związana z poziomem nauczania i uczenia się matematyki to zjawisko ogólnoswiatowe. Na potwierdzenie tego małą optymistycznego spostrzeżenia autor przytacza wypowiedź holenderskiego naukowca M. Woltersa:

(...) w dzisiejszych czasach nie ma już takich nauczycieli, którzy powiedzieliby, że wszystko jest w porządku w nauczaniu arytmetyki. Zdecydowanie za dużo jest dzieci, które nie lubią arytmetyki, a nawet gorzej, dzieci, które myślą, że jest to „głupi” przedmiot. Poza nielicznymi wyjątkami sytuacja ta jest nader rozpowszechniona i trzeba nam ją uznać za oczywistą⁵.

Rodzaje i skutki trudności w uczeniu się matematyki

Procesowi uczenia się, polegającemu m.in. na nabywaniu nowych umiejętności, zawsze towarzyszy pokonywanie trudności. Cechą charakterystyczną uczenia się

¹ J. Małkińska, *Po co nam matematyka?*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9, s. 2.

² Osiągnięcia uczniów kończących szkołę podstawową w roku 2016. Sprawozdanie ze sprawdzianu 2016, CKE, <https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/wyniki/gov.pl/sprawdzian/wyniki/> (dostęp: 28.01.2018). (dokument otrzymują Dyrektorzy szkół i oddają do dyspozycji Radzie Pedagogicznej).

³ Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2017. Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego 2017, CKE, <https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/wyniki/gov.pl/sprawdzian/wyniki/> (dostęp: 28.01.2018)

⁴ Por. D. Wood, *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Kraków 2006.

⁵ Za: tamże, s. 209.

matematyki jest rozwiązywanie zadań, które powinny być dostosowane do zindywidualizowanych możliwości rozwojowych dziecka. Gdy potrafi ono w miarę samodzielnie rozwiązać dane zadania, to – według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej⁶ – przeżywa trudności zwyczajne. Nie należy ich usuwać, gdyż przezwyciężanie ograniczeń i słabości wpisane jest w szkolny proces uczenia się matematyki. Trzeba natomiast zadbać o to, aby stopień trudności zadania był dostosowany do aktualnego potencjału rozwojowego dziecka, tak by mogło ono prawidłowo je wykonać samodzielnie lub z niewielką pomocą dorosłego.

Oprócz trudności zwyczajnych wymienia się także trudności nadmierne. Ich źródłem są często rodzice, którzy mają wygórowane oczekiwania i ambicje wobec dzieci, oraz nauczyciele, błędnie diagnozujący kompetencje uczniów i dający im zadania zdecydowanie wykraczające poza sferę najbliższego rozwoju.

Trzeci rodzaj trudności to trudności specyficzne, które powstają z powodu mniejszej dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki, uwarunkowanej wolniejszym lub nieharmonijnym rozwojem. W braku dojrzałości do uczenia się matematyki M. Darowna upatruje „praprzyczynę wczesnych niepowodzeń w tej dziedzinie i zarazem początek powstawania mechanizmu, który uniemożliwia skuteczne przekroczenie tej bariery”⁷.

Obecnie na całym świecie realizowane są prace badawcze dotyczące diagnozowania umiejętności i zdolności matematycznych dzieci. Z zagranicznych badań U. Osza⁸ wymienia prace L. Košča (1974, 1982), C. Lewisa, G. Hitcha i P. Walkera (1994), S. Ostada (1998), L. Hanich i współpracowników (2001), L. Fuchsa i D. Fuchsa (2002) oraz B. Butterwortha (1999, 2005). Są one skoncentrowane wokół trzech nurtów tematycznych. Pierwszy to analiza agnozji cyfr i akalkulii z punktu widzenia neuropsychologii klinicznej. W drugim nurcie problemy w nauce matematyki spostrzegane są jako dodatkowe skutki dysleksji lub zaburzenia analogiczne do specyficznych trudności w czytaniu. Natomiast neuropsychologia rozwojowa próbuje wyjaśniać brak lub ograniczenie umiejętności arytmetycznych, odwołując się do ich mózgowych mechanizmów.

⁶ Por. E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Warszawa 1989; *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, Warszawa 1992; *Główne grzechy przedszkolnej szkolnej edukacji matematycznej. Czyli o tym, co utrudnia dzieciom nabywanie wiadomości i umiejętności matematycznych*, [w:] *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Warszawa 2009.

⁷ M. Darowna, *Pora czy nie pora na matematykę?*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9, s. 7.

⁸ Por. U. Osza, *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapii*, Kraków 2008.

W Polsce szczegółowe badania nad niepowodzeniami w uczeniu się matematyki prowadzą przede wszystkim E. Gruszczyk-Kolczyńska⁹, U. Oszwa¹⁰ i B. Zarucka¹¹. E. Gruszczyk-Kolczyńska dowodzi, iż źródłami trudności są zaburzenia rozumowania operacyjnego, dysfunkcje w obszarze percepcji wzrokowej i sprawności manualnej, a także niekorzystne uwarunkowania środowiskowe, nieprawidłowe kształtowanie aktywności dzieci na lekcjach matematyki oraz złożone czynniki emocjonalne, które blokują proces uczenia się¹². Badaczka uważa, że „dla dzieci, które mają nadmierne trudności w uczeniu się matematyki, zadania zmieniają swój sens. Zamiast stanowić sytuację trudną intelektualnie, rozwiązywanie zadań staje się dla nich sytuacją nieznośną emocjonalnie, przed którą należy się bronić. Dlatego też dzieci o niskiej odporności emocjonalnej nie potrafią wytrzymać napięć związanych z uczeniem się matematyki”¹³. M. Darowna przestrzega, że „w efekcie powstają blokady w uczeniu się matematyki, zanika motywacja wewnętrzna, a pojawia się niechęć do wszystkiego, co wiąże się z tym przedmiotem, zwana efektem wyuczonej bezradności poznawczej”¹⁴. K. Zajdel¹⁵ wskazuje, że w psychologii istnieje nawet stan zwany syndromem „zeszytu w kratkę”, kiedy uczeń na sam jego widok odczuwa ból głowy, brzucha, dostaje ataku hysterii itp. Z pragmatycznego punktu widzenia szczególnie istotne jest poszukiwanie alternatywnego modelu kształcenia, który skutecznie rozwiąże problemy dzieci doświadczających trudności w edukacji matematycznej.

Edukacja matematyczna w systemie Marii Montessori

Aktywne, efektywne i w miarę niestresujące uczenie się matematyki powinno być naturalnym doświadczeniem każdego ucznia. Konwencjonalne metody nauczania nie

⁹ E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?* dz. cyt.; *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, dz. cyt.; *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej*, dz. cyt.

¹⁰ U. Oszwa, *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych*, dz. cyt.; U. Oszwa, *Analiza wskaźników ryzyka rozwojowych trudności arytmetycznych*, [w:] *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu. Wybrane zagadnienia*, red. U. Oszwa, Kraków 2008.

¹¹ B. Zarucka, *Trudności w uczeniu się matematyki u dzieci w ocenie nauczycieli*, [w:] *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań*, red. U. Oszwa, Kraków 2008.

¹² E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Wspomaganie dzieci w rozwoju operacyjnego rozumowania. Zakres potrzebny do kształtowania aspektu porządkowego pojęcia liczby naturalnej*, [w:] *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej*, dz. cyt.; także M. Kurant, *Rozwiązywanie zadań tekstowych przez dzieci z dyskalkulią*, [w:] *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań*, red. U. Oszwa, Kraków 2008; U. Oszwa, *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapii*, Kraków 2008.

¹³ Za: E. Kawczyńska, *Dla kogo trudna matematyka*, „Życie Szkoły” 2009, nr 1, s. 179.

¹⁴ M. Darowna, *Pora czy nie pora na matematykę?*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9, s. 7.

¹⁵ K. Zajdel, *Tajemnice świata matematyki*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9, s. 3-7.

przynoszą jednak wymiernych efektów; prowadzą do wymienionych trudności w nauce i negatywnych emocji związanych z matematyką. Niepokojące obserwacje związane z edukacją matematyczną prowadził m.in. Piaget pisząc, iż:

(...) zjawiskiem typowym jest fakt, że w klasach o normalnym poziomie uzdolnień tylko część uczniów rozumie matematykę, przy czym ta część niekoniecznie obejmuje osoby najbardziej uzdolnione w innych dziedzinach. Niekiedy nawet traktuje się rozumienie matematyki jako oznakę specjalnego uzdolnienia, owej „żyłki” do matematyki, której obecność lub brak są uważane za wykładnię powodzeń lub porażek, bez zastanowienia się, czy te ostatnie nie były może skutkiem metody nauczania¹⁶.

A. Kalinowska stwierdza wprost, że

(...) polska szkoła pozostaje na ogół bastionem rozwijania myślenia matematycznego ucznia, opierającego się na zasadzie magazynowania określonych, zaprezentowanych przez nauczyciela lub podręcznik algorytmów, a następnie – przez wyćwiczenie sposobów posługiwania się nimi – doprowadzania do pomyślnego rozpoznania problemu. Oznacza to, że myślenie matematyczne ucznia ma polegać wyłącznie na kroczeniu śladami wyznaczonymi przez prowadzącego. O żadnej samodzielności intelektualnej, oczywiście, w tym wypadku trudno mówić¹⁷.

Taka niekorzystna edukacyjnie sytuacja implikuje poszukiwania alternatywnych rozwiązań. Jednym z nich jest system pedagogiczny Marii Montessori, coraz powszechniej wkraczający do polskich przedszkoli i szkół¹⁸ i określany jako „jedna z wielkich koncepcji edukacyjnych tworzonych w myśl hasła «szkoła na miarę dziecka»¹⁹.

B. Stein²⁰ zauważa, że dla M. Montessori rozwijanie „matematycznego ducha” było szczególnie ważnym celem. Twórczyni metody uważała bowiem, że w każdym człowieku tkwi zmysł matematyczny, dzięki któremu jest on „jedyną istotą, która potrafi myśleć matematycznie, wyciągać wnioski, badać, kształtować własną wyobraźnię i możliwości uogólniania”²¹.

¹⁶ J. Piaget, *Nauczanie matematyki a rozwój dziecka*, „Wiadomości Matematyczne” 1979, t. XXII, nr 1, s. 150.

¹⁷ A. Kalinowska, *Rozwijanie kompetencji myślenia matematycznego*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9, s. 14.

¹⁸ V. Tuszyńska-Bogucka *Nauczyciel w percepcji dzieci 6-letnich w przedszkolu masowym oraz placówce Montessori- analiza porównawcza*, [w:] *Szkoła i nauczyciel w percepcji uczniów*, red. Z.B. Gaś, Warszawa 1999; także B. Surma, *Pedagogika Montessori – podstawy teoretyczne i twórcze inspiracje*, Łódź 2008.

¹⁹ S. Guz, *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia dzieci*, Lublin 2006; s. 15.

²⁰ B. Stein, *Teoria i praktyka pedagogiki Marii Montessori w szkole podstawowej*, Kielce 2003.

²¹ K. Skjöld Wennerström, M. Bröderman Smeds, *Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole*, Kraków 2007, s. 145.

Edukacja matematyczna w systemie Montessori umożliwia dziecku samodzielne, czynnościowe nabywanie nowych umiejętności i wiadomości, rozwijanie zainteresowania matematyką, wprowadzanie w świat liczb, odkrywanie znaczenia kodowania i działań numerycznych. Sprzyja podejmowaniu celowych działań zmierzających do rozwiązywania zadań matematycznych oraz rozwijaniu odporności emocjonalnej.

Materiały sensoryczne jako przygotowanie do edukacji matematycznej

Dzieci w przedszkolu montessoriańskim spotykają się po raz pierwszy z matematyką już w wieku 2,5 lat dzięki materiałom sensorycznym, które są ważnym etapem pośredniego przygotowania do edukacji matematycznej. Wynika to z obowiązującej w systemie Montessori i bardzo istotnej z punktu widzenia pracy dziecka, zasady ciągłości oddziaływań. Cały materiał rozwojowy stanowi integralną całość. Każdy następny materiał różni się od poprzednich stopniowo zwiększającym się poziomem trudności i wymaganym myśleniem abstrakcyjnym, prowadząc w sposób logiczny i uporządkowany na coraz wyższe poziomy rozumienia i wiedzy. S. Guz wskazuje wyraźnie, że konieczne jest, aby: „dzieci stopniowo przechodziły od działań na materiale konkretnym do działań na materiale coraz bardziej abstrakcyjnym; od czynności na samych konkretach poprzez poznawanie symboli matematycznych i kojarzenie ich z konkretnymi, do działań na materiale całkowicie abstrakcyjnym, symbolicznym”²². Stąd też materiały rozwijające zmysły – jak wspomniano – efektywnie przygotowują również dziecko do późniejszej nauki matematyki. M. Montessori twierdziła bowiem, że dziecko musi najpierw dotknąć, zobaczyć i doświadczyć, zgodnie z poglądem J. Locke’a, iż „w umyśle nie ma niczego, co wcześniej nie znalazło się w zmysłach”²³. „Zmaterializowane abstrakcje”, czyli pomoce do kształcenia zmysłów, są zdaniem Montessori niezbędną podstawą do zrozumienia matematyki. „Jak już wspomniałam” – pisała włoska lekarka i pedagogka – „materiał nasz umożliwia klasyfikację właściwości przedmiotów, a tym samym jest jedną z najbardziej skutecznych pomocy dla stworzenia porządku myślowego. Nie ulega wątpliwości, że materiał ten jest nie tylko kluczem do poznawania otoczenia; trzeba go również traktować jako środek, przy pomocy którego rozwija się duch matematyczny”²⁴.

Wykonując ćwiczenia z materiałami sensorycznymi, dziecko ma możliwość manipulowania przedmiotami, tworzenia ciągów, klasyfikowania, odnajdywania par,

²² S. Guz, *Edukacja w systemie Montessori*, Lublin 1998, s. 98.

²³ U. Steenberg, *Pedagogika Marii Montessori w przedszkolu*, Kielce 2004, s. 47.

²⁴ M. Montessori, *Odkrycie dziecka*, Łódź 2014, s. 153.

szeregów i kontrastów oraz doświadczania relacji przestrzennych. Takie doświadczenia przygotowują do matematycznego myślenia abstrakcyjnego, którego cechą charakterystyczną jest porównywanie, różnicowanie, szeregowanie i porządkowanie. Szczególną rolę odgrywają w tym zakresie materiały sensoryczne z grupy doskonalącej spostrzeganie wzrokowe oraz spostrzeganie form. Praca z różową wieżą służy do zdobywania pierwszych doświadczeń w zakresie pojęć: duży–mały, a także: mały–mniejszy–najmniejszy oraz duży–większy–największy (zawsze jednak pokazuje się relacje między elementami tak, aby uwrażliwić dziecko na to, iż pojęcia są zrelatywizowane). Ponadto takie ćwiczenia pośrednio aktywizują również umysł matematyczny: dziesięć klocków przygotowuje do budowy pozycyjnego układu dziesiątkowego, a wielkość klocków – do rozumienia pojęcia sześcianu. Manipulowanie czerwonymi patykami pozwala dziecku odkryć różne długości, doświadczyć jej mierzenie oraz dostrzegać różnice w długości i wysokości przedmiotów. Ćwiczenia z brązowymi schodami natomiast rozwijają świadomość kształtu i objętości, stanowiącą podstawę w rozwoju myślenia matematycznego dotyczącego figur płaskich i przestrzennych. Z kolei komoda geometryczna jest nie tylko pośrednim przygotowaniem do nauki geometrii, dzięki któremu dziecko poznaje nazwy podstawowych figur geometrycznych i uczy się je opisywać, ale jest także „doskonałym materiałem konstrukcyjnym o dużej jakości estetycznej”²⁵. Bardzo lubiane przez dzieci są bryły geometryczne. Rozwijają one zmysł stereognostyczny i jednocześnie pozwalają doświadczyć, które bryły się toczą, które trzeba przewrócić; zachęcają do łączenia brył i konstruowania, a przy okazji uczą nowych nazw, takich jak: prostopadłościan, ostrosłup, graniastosłup czy kula. Istotne z punktu widzenia edukacji matematycznej są ćwiczenia z trójkątami konstrukcyjnymi. Pozwalają one uświadomić dziecku różne rodzaje figur zawartych w trójkącie, sześciokącie czy prostokącie oraz doskonałą umiejętność rozróżniania form geometrycznych oraz nazywania trójkątów. Natomiast praca z dwu- i trypoziomowym sześcianem skutecznie przygotowuje małe dziecko do rozumienia trudnych pojęć matematycznych, takich jak sześcian dwumianu i trzecia potęga trójmianu.

Wybrane materiały rozwojowe jako wsparcie rozwoju umysłu matematycznego

Treści matematyczne w metodzie Montessori doświadczane są zawsze poprzez aktywne działanie dziecka. K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds²⁶ opierając się na własnych obserwacjach, dowodzą, że poznawanie pojęć matematycznych

²⁵ U. Steenberg, *Pedagogika Marii Montessori w przedszkolu*, Kielce 2004, s. 50.

²⁶ K. Skjöld Wennerström, M. Bröderman Smeds, *Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole*, Kraków 2007.

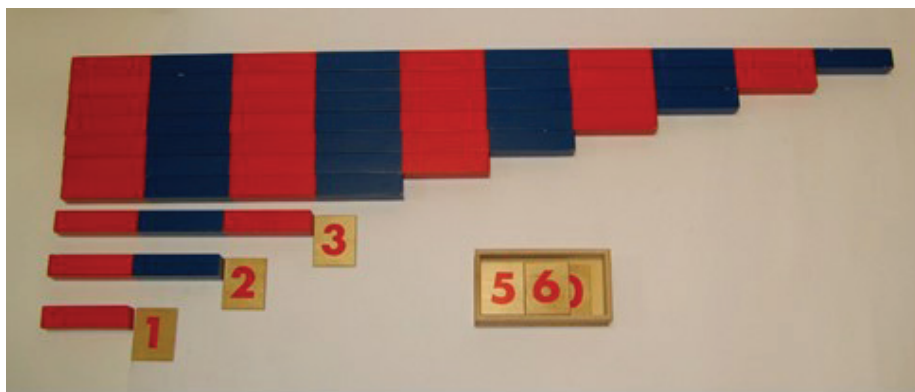
poprzez praktyczne ćwiczenia pobudza ciekawość dziecka i jego chęć do dalszej nauki. Samodzielne doświadczanie i porównywanie wielkości, objętości, wymiarów przedmiotów, ułatwia lepsze poznanie podstawowych reguł matematycznych, choć dziecko często nie ma jeszcze świadomości tego zjawiska.

Ćwiczenia z montessoriańskim materiałami matematycznymi realizują treści, które można podzielić na cztery grupy tematyczne:

- umiejętność liczenia, przeliczania w zakresie 10, czyli poznanie liczby naturalnej we wszystkich aspektach (monografia liczby), uświadomienie kolejności liczb w ciągu liczbowym (rosnącym lub malejącym), wdrożenie do zapisywania cyfr; poznanie relacji pomiędzy liczbą i symbolem; wstępne zapoznanie z dodawaniem i odejmowaniem w zakresie 10; kształtowanie umiejętności porównywania ilości – poznanie znaków „<”, „>”, „=”; zapoznanie z zerem i kształtowanie pojęcia zera jako zbioru pustego; poznanie pojęcia parzystości i nieparzystości liczb oraz tworzenie zbiorów od 1 do 10. Do tej grupy materiałów montessoriańskich należą: drążki liczbowe i tabliczki liczbowe oraz cyfry dotykowe, wrzeciona i żetony.
- wprowadzenie pozycyjnego układu dziesiętkowego, w tym zapoznanie z zasadami budowy pozycyjnego układu dziesiętkowego; wykonywanie działań matematycznych w systemie dziesiętkowym; poznanie znaków dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia; początkowe liczenie w pamięci. Wskazane treści są realizowane poprzez ćwiczenia ze złotym materiałem (w tym zabawa w bank), znaczkami, tablicą kropek, małym, dużym i złotym liczydłem, dużą tablicą mnożenia, zestawem do dzielenia liczb wielocyfrowych.
- wprowadzenie liczb do 1000, czyli rozwijanie umiejętności przeliczania pełnymi dziesiątkami i setkami; przyporządkowywanie symbolu graficznego liczby do podanej ilości; kształtowanie pojęcia stałości liczby. Materiałami z tej grupy są tablica Sequina nr 1 i 2, krótkie łańcuchy kolorowych liczb, złote łańcuchy setki i tysiąca, tablica setki oraz złoty materiał.
- wykonywanie działań na małych liczbach od 1 do 100, w szczególności rozwijanie umiejętności dodawania liczb z przekroczeniem progu dziesiętkowego; wykonywanie obliczeń poprzez dopełnianie do 10; konkretyzowanie przemienności dodawania; ćwiczenie umiejętności odejmowania od 0 do 18; doskonalenie rachunku pamięciowego; nauka tabliczki mnożenia w zakresie 100; geometryczna interpretacja mnożenia i przemienności mnożenia; przygotowanie do potęgowania liczb; wyznaczanie dzielników liczb od 1 do 81;
- wskazanie związków między mnożeniem i dzieleniem. Wymienione umiejętności rozwijają takie materiały rozwojowe, jak wąż dodawania i odejmowania, paskowa tablica dodawania i odejmowania, zestaw tablic dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia oraz paciorkowa tablica mnożenia i dzielenia.

Poszczególne materiały matematyczne wprowadzane są w określonej kolejności, którą warunkuje z jednej strony specyfika przedmiotu, a z drugiej konieczność respektowania zasady stopniowania trudności. Każdy następny materiał – jak wspomniano różni się od poprzednich stopniowo wzrastającym poziomem trudności i abstrakcji²⁷.

Drażki liczbowe służą wprowadzeniu pojęcia liczby naturalnej w zakresie 10 w aspekcie mnogościowym (kardynalnym), porządkowym, miarowym, algebraicznym oraz symbolicznym.



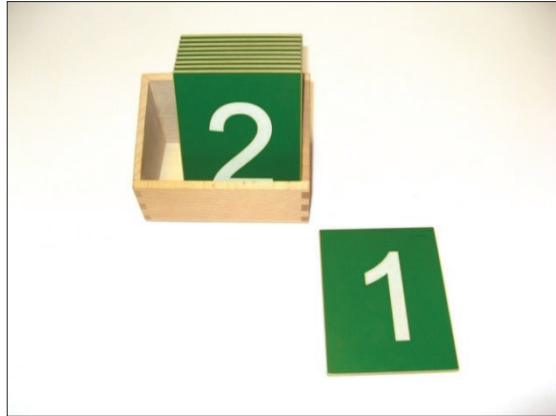
Fot. 1. Drażki liczbowe

Ponadto w ćwiczeniach wariacyjnych dziecko wykonuje proste działania matematyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb; poznaje symbole działań matematycznych i relacje między liczbami oraz niektóre prawa matematyczne np. przemienność dodawania i mnożenia. Praca z patykami liczbowymi kształtuje także poczucie dokładności, rozwija zdolność skupiania i utrzymywania uwagi na zadaniu jako umiejętności uczenia się. Ćwiczenia z tym materiałem rozwojowym są szczególnie ważne w przypadku dzieci, które krótko koncentrują się na zadaniu i szybko rozpraszają uwagę nawet pod wpływem słabego czynnika zakłócającego, a także dzieci z zaburzeniami małej motoryki, ograniczeniami sprawności manualnej i problemami z koordynacją wzrokowo-ruchową.

Cyfry dotykowe z kolei umożliwiają poznanie kształtu cyfr na drodze doznania sensorycznego – za pomocą opuszków palców. W ten sposób dziecko poznaje świat

²⁷ Por. S. Guz, *Edukacja w systemie Montessori*, Lublin 1998; P. Oswald, G. Schlutz-Benesch, *Rundgedanken der Montessori – Pädagogik*, Herder–Freiburg–Basel–Wien 1990; A. Albinoska, R. Czekalska, A. Gaj, B. Lauba, J. Matczak, J. Picuskiak, J. Sosnowska, *Odkryjmy Montessori raz jeszcze*, Kraków 2008; U. Steenberg, *Pedagogika Marii Montessori w przedszkolu*, Kielce 2004.

cyfr, a także przygotowuje się do pisania pod względem sensomotorycznym – doskonali koordynację mięśniową, rozwija precyzję i dokładność ruchów.



Fot. 2.
Cyfry dotykowe

Ćwiczenia z wrzecionami pozwalają na utrwalenie pojęcia liczby w aspekcie symbolicznym, mnogościowym i porządkowym, oraz na poznanie i zapamiętanie sekwencji liczb. Dziecko ma możliwość widzieć różną liczbę przeliczanych wrzecion, słyszeć w czasie przeliczania nazwy liczebników, czuć w dłoni wzrastającą liczbę elementów, a także samo przeliczać, czyli doświadczać liczby wielozmysłowo. Istotnym zadaniem tego materiału jest także ukształtowanie pojęcia liczby zero jako zbioru pustego.



Fot. 3.
Wrzeciona

M. Montessori dokonała ciekawych obserwacji dotyczących doświadczania przez dzieci liczby 0. Proponowała zabawę polegającą na tworzeniu zbiorów o liczebności zgodnej z wylosowaną liczbą. Badaczka zauważyła, że dzieci na początku przynoszą więcej przedmiotów niż to wskazuje ich karteczka z liczbą. Przypadki te zdarzają się nie dlatego, że dziecko nie pamięta swojej liczby, czy że nie potrafi jej prawidłowo odczytać lub przeliczyć przedmiotów, ale dlatego, że dzieci wolą mieć dużo aniżeli mało. Trudno im się powstrzymać od gromadzenia większej liczby przedmiotów, zwłaszcza wtedy, gdy widzą, że inni przynoszą więcej. Szczególnie duży wysiłek woli wiąże się z wyciągnięciem zera, kiedy dziecko musi powstrzymać się od działania, podczas gdy inni coś robią, i jednocześnie kontrolować swoje emocje.

Bardzo interesujące – pisała Montessori – jest obserwowanie wyrazu twarzy dzieci, które wylosowały zero. Różnice indywidualne, które ujawniają się w tym momencie, są niemalże odkryciem „charakteru” każdego z osobna. Niektóre dzieci pozostają niewzruszone, dumnie próbują ukryć wewnętrzny żal i rozczarowanie, inne okazują swoje rozczarowanie gestami, inne nie mogą ukryć uśmiechu, który rodzi się w tej wyjątkowej sytuacji, inne z kolei naśladują ruchy swoich towarzyszy aż do końca ćwiczenia, niektóre okazują zniechęcenie²⁸.

Aby pomóc dziecku, które z powodu wylosowania zera jest zakłopotane i zrezygnowane, nauczyciel może powiedzieć: „Uważajcie, trudno jest utrzymać w tajemnicy zero, zero można wyrazić twarzą, nie pozwólcie, by ktoś zobaczył, że nie macie nic!”²⁹. To pozwala przyzwyczaić się do sytuacji, w której wylosowana liczba jest zero. Stopniowo dziecko przestaje czuć się zirytowane czy smutne, ale zaczyna rozmyślać, jak się zachować, aby utrzymać tajemnicę. Dlatego wskazaną zabawę M. Montessori uważa bardziej za ćwiczenie woli (konieczność utrzymania się w limicie, jaki wyznacza karteczka) niż lekcję liczenia.

Kolejny materiał – żetony – pozwala wizualizować liczbę przyporządkowywaną do cyfr oraz wprowadzić pojęcie liczby parzystej i nieparzystej. Pełni także funkcję utrwalającą i kontrolną. Ma na celu sprawdzenie, czy dziecko zna kolejność liczb, łączy symbol z odpowiadającą mu ilością elementów, wie, ile odrębnych jednostki potrzebuje do utworzenia każdej z liczb 1–10 oraz umie tworzyć zbiory.

²⁸ M. Montessori, *Odkrycie dziecka*, Łódź 2014, s. 230.

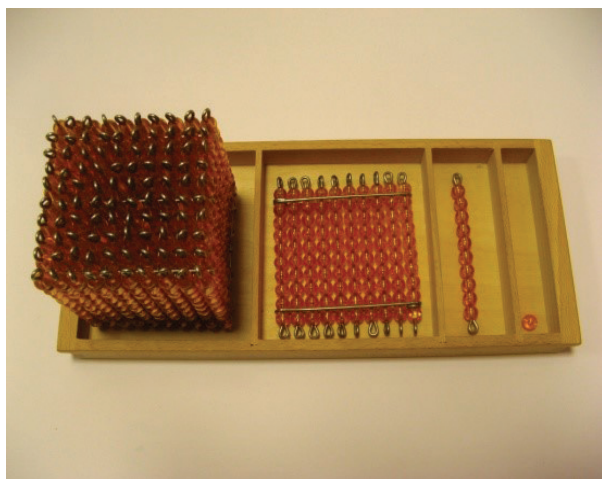
²⁹ Tamże, s. 231.



Fot. 4.
Żetony

Zagadnieniem realizowanym bardzo efektywnie poprzez pracę na materiałach montessoriańskich jest wprowadzenie budowy pozycyjnego układu dziesiętkowego. Służy do tego zestaw, zwany złotym materiałem. Tworzą go pojedyncze złote perełki oznaczające jedność, druciki zawierające po 10 złotych perełek symbolizujące dziesiątki, kwadraty ze 100 perełkami konkretyzujące setki oraz sześciiany zbudowane z 1000 perełek przedstawiające tysiące. Do zestawu należą również karty liczbowe z symbolami liczb od 1 do 9000 we właściwym kolorze i odpowiedniej długości. Tak zgromadzony materiał rozwojowy pozwala dziecku zrozumieć dziesiętkowy system liczenia poprzez sensoryczne doświadczanie palcami jedności, dziesiątki, kwadratu setki i kostki sześciianu. Dzięki temu setka przestanie być abstrakcyjną liczbą, a staje się dotykającym kwadratem złożonym z dziesięciu rzędów po 10 jedności. Dziecko może ten kwadrat wziąć do ręki i samodzielnie przeliczyć wszystkie jedności. Na drodze doświadczalnej uczy się rozumieć, czym jest jeden, dziesięć, sto i tysiąc – czując wagę przedmiotów, porównując je oraz oceniając wzrokiem i dotykiem relacje wielkości względem siebie i ich proporcje. Dopiero, gdy dziecko zintegruje doświadczenia ilustrujące, czym są jedności, dziesiątki, setki i tysiące, poznaje ich symboliczne reprezentacje w postaci liczb 1, 10, 100 i 1000.

W celu ukazania specyfiki pracy z montessoriańskimi pomocami rozwojowymi istotnym wydaje się być opis metodyczny wprowadzenia pierwszego elementu zestawu złotego materiału, czyli tacki demonstracyjnej.



Fot. 5.
Złoty materiał –
tacka demonstracyjna

Składają się na nią: jedna złota perełka (oznacza jedność), drucik złożony z dziesięciu złotych perełek (oznacza dziesiątkę), kwadrat zbudowany ze stu złotych perełek połączonych drucikami (oznacza setkę) oraz sześcian zawierający tysiąc złotych perełek (oznacza jedność tysięcy).

Nauczyciel po przygotowaniu materiału na stoliku udziela trzystopniowej lekcji nazw. Pierwszy stopień to asocjacja między spostrzeganiem zmysłowym a nazwą, czyli podanie nazwy liczebnika. Nauczyciel bierze złotą perełkę i podaje nazwę: „To jest jeden. To jest jedna jedność”. Ważne jest, aby nauczyciel zastosował oba te sformułowania. Dziecko powtarza czynność nauczyciela. Nauczyciel bierze złotą dziesiątkę, przelicza ją jednością od lewej do prawej: „jedna jedność, dwie jedności, trzy jedności” aż do dziesięciu jedności i zwracając się do dziecka podaje nazwę: „To jest dziesięć. To jest jedna dziesiątka”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela. Nauczyciel bierze złotą setkę i przelicza ją dziesiątką od dołu do góry: „jedna dziesiątka, dwie dziesiątki, trzy dziesiątki” aż do dziesięciu dziesiątek. Zwraca się do dziecka podając nazwę: „To jest sto, jedna setka”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela. Nauczyciel bierze złoty tysiąc i przelicza go setkami od dołu do góry (lub od lewej do prawej) „jedna setka, dwie setki, trzy setki” aż do dziesięciu setek. Zwraca się do dziecka i podaje nazwę: „To jest tysiąc, jeden tysiąc”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela.

Drugi stopień lekcji to poznanie przedmiotów wg nazwy (rozumienie pasywne), które ma na celu sprawdzenie, czy dziecko kojarzy nazwę liczebnika z podaną ilością. Nauczyciel prosi: „Pokaż sto”, „Daj jedną dziesiątkę”, „Połóż tysiąc”, „Połóż jedność na stole”. Takie ćwiczenia należy wielokrotnie powtórzyć, używając

zamiennie pojęć: jeden – jedna jedność, dziesięć – jedna dziesiątka, sto – jedna setka oraz tysiąc – jeden tysiąc.

Ostatni, trzeci stopień lekcji, to wywoływanie nazwy wg przedmiotów, czyli rozumienie aktywne. Nauczyciel wskazuje złoty materiał i pyta: „Ile to jest?”. Dziecko udziela odpowiedzi. Dziecko może odpowiadać z zamkniętymi oczami na pytanie nauczyciela: „Ile trzymasz w ręce?”, „Ile ci dałam?”.

Po wprowadzeniu tacki demonstracyjnej kolejnymi ćwiczeniami, które utrwalają budowę pozycyjnego układu dziesiętkowego, jest „gra w dziewięć”, drzewko dziesiątek oraz zabawa „Bałagan”.

Skuteczność pedagogiki Marii Montessori

Badania efektywności metody Montessori na gruncie amerykańskim prowadził P. Epstein, od kilku lat związany z Polskim Instytutem Montessori (PIM). Badacz twierdzi, że uczniowie ze szkół Montessori deklasują swoich rówieśników w znormalizowanych testach stanowych. Dzieci z placówek montessoriańskich przejawiają niezwykle zdolności do wysiłku umysłowego. Gdy tylko są na to gotowe, samodzielnie czytają, piszą, a także myślą matematycznie. Nie ma dla nich znaczenia zewnętrzny system nagród i motywacji; dzieci te największą radość i przyjemność znajdują w samym procesie uczenia się. Praca prowadzi je ku rozwojowi i samodoskonaleniu. Wraz z upływem czasu dziecko rozwija w sobie dyscyplinę wewnętrzną i pogodny spokój³⁰. Podobne wyniki otrzymały A. Lillard i N. Else-Quest dowodząc, że dzieci uczone metodą Montessori osiągały lepsze wyniki w nauce nie tylko tradycyjnych przedmiotów, takich jak język ojczysty czy matematyka, ale również wykazywały się lepszą znajomością norm, cechowało je większe poczucie sprawiedliwości i uczciwości³¹.

Również w Polsce metoda Montessori jest przedmiotem wielu badań empirycznych³². Najintensywniej działa w tym zakresie Lubelski Oddział Polskiego Stowarzyszenia Montessori oraz Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej. Szczególną uwagę

³⁰ P. Epstein, *Odkryć każde z dzieci (Edukacja Montessori)*, „Bliżej Przedszkola” 2012, nr 6, s. 44-46.

³¹ A. Lillard, *Montessori Education Provides Better Outcomes Than Traditional Methods*, “Study Finds Science”, Journal Article 29 września 2006, <https://news.virginia.edu/.../montessori-education-provides-better> (dostęp 28.01.2018).

³² Zob. J. Andrzejewska, *Kompetencje poznawcze dzieci pięcioletnich*, [w:] *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Złożony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*, red. H. Sowińska, Poznań 2011; B. Surma, *Gotowość szkolna do uczenia się matematyki dzieci sześcioletnich w przedszkolu Montessori – raport z badań*, „Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce” 2013, nr 28/2, s. 35-57; V. Tuszyńska-Bogucka, *Nauczyciel w percepcji dzieci 6-letnich w przedszkolu masowym oraz placówce Montessori – analiza porównawcza*, [w:] *Szkoła i nauczyciel w percepcji uczniów*, red. Z.B. Gaś, Warszawa 1999; B. Bednarczuk, *Dziecko w klasie Montessori*, Lublin 2007.

naależy zwrócić na prace badawcze S. Guz, która analizowała osiągnięcia rozwojowe dzieci w okresie przedszkolnym i wczesnoszkolnym w kontekście oddziaływań i doświadczeń edukacyjnych. Uzyskane wyniki pozwalają wnioskować, że edukacja w systemie Montessori zapewnia korzystniejsze warunki dla rozwoju i integracji zdolności sensoryczno-motorycznych dzieci w wieku przedszkolnym, warunkuje lepsze wyniki w zakresie rozwoju umysłowego i sprawności językowych (szczególnie na poziomie przedszkolnym), sprzyja kształtowaniu się stylu poznawczego dzieci w wieku wczesnoszkolnym oraz poczucia kontroli wewnętrznej dzieci przedszkolnych. W przeprowadzonych badaniach istotnie lepsze rezultaty uzyskiwały dzieci montessoriańskie w większości wskaźników dotyczących kompetencji szkolnych, takich jak orientacja w świecie przyrody czy umiejętność czytania ze zrozumieniem. Ponadto osiągały one wyższe wyniki w ogólnopolskich sprawdzianach umiejętności szkolnych dla szóstoklasistów. Zebrany materiał empiryczny dowodzi również, że system Montessori stwarza korzystniejsze niż system tradycyjny warunki do kształtowania adekwatnej samooceny oraz wzrostu poziomu aspiracji dzieci w młodszym wieku szkolnym³³. Jeśli chodzi o rozwój społeczny i kształtowanie się osobowości, to autorka badań uważa, że „dzieci z lubelskich oddziałów Montessori, podobnie jak dzieci amerykańskie, są bardziej niezależne, samodzielne i autonomiczne w działaniu, czują się bardziej podmiotowo traktowane przez nauczyciela niż dzieci w oddziałach prowadzonych według modelu powszechnie stosowanego”³⁴.

Zakończenie

Oczywiste jest, że „skuteczne nauczanie matematyki nie wyeliminuje dyskalkulii rozwojowej, może jednak złagodzić jej przebieg, a także wpłynąć na zmniejszenie odsetka osób, borykających się z matematyką wskutek nieodpowiednich metod edukacji”³⁵. Ważne są zatem podejmowane ustawicznie próby modyfikacji i reformowania programów edukacji matematycznej, zmierzające w kierunku większej ich efektywności, rozumianej również w aspekcie szeroko pojmowanej profilaktyki trudności arytmetycznych. Należy pamiętać o stanowisku psychologa genewskiego J. Piageta, który twierdził, że „każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeżeli odwołamy się do jego aktywności i jeżeli uda nam się usunąć

³³ S. Guz, *Wyzwalanie aktywności poznawczej dzieci w edukacji Montessori*, [w:] *Aktywność dzieci i młodzieży* red. S. Guz, T. Sokołowska-Dzioba, A. Pielecki, Warszawa 2008; S. Guz, *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia dzieci*, Lublin 2006.

³⁴ S. Guz, *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia dzieci*, dz. cyt., s. 256.

³⁵ U. Osza, *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapii*, Kraków 2008, s. 102.

zaburzenia emocjonalne, które często wywołują uczucie niższości na lekcjach z tej właśnie dziedziny wiedzy³⁶. Podobną opinię wyrażał W.A. Krutiecki pisząc, iż „nie ma absolutnej niezdolności do uczenia się matematyki, nie istnieje także swego rodzaju «matematyczna ślepota». Dlatego każdy normalny i zdrowy uczeń, przy prawidłowym nauczaniu, może przyswoić podstawowe pojęcia i umiejętności matematyczne³⁷. Takie skuteczne nauczanie zapewnia metoda Montessori, która koresponduje z zalecaną we współczesnej metodyce, a opartą na konstruktywistycznych podstawach czynnościowo-realistyczno-problemową strategią edukacji matematycznej. Prowadzi ona do prawidłowej sytuacji edukacyjnej, kiedy uczeń na wysokim poziomie rozumie stawiane mu zadania, ale jednocześnie jest biegły w wykonywaniu obliczeń i stosuje adekwatne procedury liczenia.

Montessoriańska matematyka jest nie tylko efektywna, ale sprawia uczniom radość i przyjemność. „Zaproszeniowy” charakter materiałów montessoriańskich powoduje, że już dziecko przedszkolne chętnie wybiera ćwiczenia matematyczne i od najmłodszych lat nabywa podstawowe umiejętności i pozytywne doświadczenia emocjonalne gwarantujące mu sukcesy w nauce matematyki na dalszych etapach edukacji.

Bibliografia

- Albinoska A., Czekalska R., Gaj A., Lauba B., Matczak J., Piecusiak J., Sosnowska J., *Odkryjmy Montessori raz jeszcze*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2008.
- Andrzejewska J., *Kompetencje poznawcze dzieci pięcioletnich*, [w:] *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*, red. H. Sowińska, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2011.
- Bednarczuk B., *Dziecko w klasie Montessori*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2007.
- Darowna M., *Pora czy nie pora na matematykę?*, „Edukacja i Dialog” 2005, nr 9.
- Epstein P., *Odkryć każde z dzieci (Edukacja Montessori)*, „Bliżej Przedszkola” 2012, nr 6.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Instytut Wydawniczy Związków Zawodowych, Warszawa 1989.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa 1992.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Główne grzechy przedszkolnej szkolnej edukacji matematycznej. Czyli o tym, co utrudnia dzieciom nabywanie wiadomości i umiejętności matematycznych*, [w:] *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o., Warszawa 2009.

³⁶ J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja?*, Warszawa 1977, s. 87.

³⁷ Za: E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Warszawa 1989, s. 101.

- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Wspomaganie dzieci w rozwoju operacyjnego rozumowania. Zakres potrzebny do kształtowania aspektu porządkowego pojęcia liczby naturalnej* [w:] *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o. o, Warszawa 2009.
- Guz S., *Edukacja w systemie Montessori*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 1998.
- Guz S., *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia dzieci*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2006.
- Guz S., *Wyzwalanie aktywności poznawczej dzieci w edukacji Montessori* [w:] *Aktywność dzieci i młodzieży* red. S. Guz, T. Sokołowska-Dzioba, A. Pielecki, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa 2008.
- Kalinowska A., *Rozwijanie kompetencji myślenia matematycznego*, „Edukacja i Dialog”, (2005) 9.
- Kawczyńska E., *Dla kogo trudna matematyka*, „Życie Szkoły”, (2009)1.
- Kurant M., *Rozwiązywanie zadań tekstowych przez dzieci z dyskalkulią* [w:] *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań* red. U. Oszwa, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2008.
- Lillard A., *Montessori Education Provides Better Outcomes Than Traditional Methods*, Study Finds Science, Journal Article 29 września 2006, <https://news.virginia.edu/.../montessori-education-provides-better> (dostęp 28.01.2018).
- Montessori M., *Odkrycie dziecka*, tłum. A. Pluta, Wydawnictwo Palatum, Łódź 2014.
- Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2017. Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego 2017*, CKE, <https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/wyniki/> <https://cke.gov.pl/sprawdzian/wyniki/> (dostęp: 28.01. 2018) CKE.
- Osiągnięcia uczniów kończących szkołę podstawową w roku 2016. Sprawozdanie ze sprawdzianu 2016*, CKE, <https://cke.gov.pl/egzamin-gimnazjalny/wyniki/> <https://cke.gov.pl/sprawdzian/wyniki/> (dostęp: 28.01.2018) CKE.
- Oswald P., Schlutz-Benesch G., *Grundgedanken der Montessori-Pädagogik*, Herder-Freiburg-Basel – Wien 1990.
- Oszwa U., *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapii*, Wydawnictwo Impuls, Kraków 2008.
- Oszwa U., *Analiza wskaźników ryzyka rozwojowych trudności arytmetycznych*, [w:] *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu. Wybrane zagadnienia*, red. U. Oszwa, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2008.
- Piaget J., *Dokąd zmierza edukacja?*, PWN, Warszawa 1977.
- Piaget J., *Nauczanie matematyki a rozwój dziecka*, „Wiadomości Matematyczne” 1979, t. XXII, nr 1.
- Skjöld Wennerström K., Bröderman Smeds M., *Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2007.
- Steenberg U., *Pedagogika Marii Montessori w przedszkolu*, Wydawnictwo „Jedność”, Kielce, 2004.
- Stein B., *Teoria i praktyka pedagogiki Marii Montessori w szkole podstawowej*, Wydawnictwo „Jedność”, Kielce 2003.

- Surma B., *Gotowość szkolna do uczenia się matematyki dzieci sześcioletnich w przedszkolu Montessori – raport z badań*, „Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce” 2013, nr 28/2.
- Surma B., *Pedagogika Montessori – podstawy teoretyczne i twórcze inspiracje*, Wydawnictwo Palatum, Łódź 2008.
- Tuszyńska-Bogucka V., *Nauczyciel w percepcji dzieci 6-letnich w przedszkolu masowym oraz placówce Montessori-analiza porównawcza*, [w:]: *Szkoła i nauczyciel w percepcji uczniów*, red. Z.B. Gaś, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 1999.
- Wood D., *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006.
- Zajdel K., *Tajemnice świata matematyki*, „Edukacja i Dialog” 2005, 9.
- Zarucka B., *Trudności w uczeniu się matematyki u dzieci w ocenie nauczycieli*, [w:] *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań*, red. U. Oszwa, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2008.

ADRES DO KORESPONDENCJI

dr Izabella Kaiser
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,
Wydział Studiów Edukacyjnych
Zakład Edukacji Dziecka
e-mail: izabella.kaiser@amu.edu.pl