

Krzysztof Śleziński

ORCID: 000-0002-6662-3871

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Intuicjonizm L. Brouwera: źródła, rozwój, znaczenie badań logików polskich

L. Brouwer's Intuitionism: Sources,
Development, and the Contribution
by Polish Logicians

Abstrakt

Artykuł jest poświęcony logice intuicjonistycznej L.E.J. Brouwera. Są w nim omówione źródła i cele tej logiki – była jednym z nurtów konstruktywistycznych w filozofii matematyki i miała przezwyciężyć kryzys podstaw matematyki – oraz główne etapy jej rozwoju (A. Heyting, K. Gödel), a zwłaszcza znaczenie badań nad nią logików polskich (Z. Zawirski, J. Łukasiewicz, A. Tarski, S. Jaśkowski). Wnioski uzasadnione w artykule na kanwie ustaleń historycznych mają także znaczenie dla metafizycznej dyskusji nad rozumieniem matematyki, podstawowych praw logiki oraz relacji języka do rzeczywistości.

Słowa kluczowe: logika intuicjonistyczna, filozofia Brouwera, system Heytinga, Zygmunt Zawirski, Jan Łukasiewicz, Alfred Tarski, Stanisław Jaśkowski, metody aksjomatyczne i macierzowe.

Abstract

The article is devoted to L.E.J. Brouwer's intuitionistic logic. It discusses the origins and objectives of this logic, which was one of the constructivist trends in the philosophy of mathematics. The logic was intended to resolve the crisis of the foundations of mathematics. The article also covers the primary stages of its development, including the work of A. Heyting and K. Gödel. Additionally, it emphasizes the significance of research conducted by Polish logicians, such as Z. Zawirski, J. Łukasiewicz, A. Tarski, and S. Jaśkowski. The article's conclusions, which are justified on the basis of historical findings, are also important for metaphilosophical discussions about understanding mathematics and the basic laws of logic. These discussions also address the relationship between language and reality.

Keywords: Intuitionistic logic, Brouwer's philosophy, Heyting system, Zygmunt Zawirski, Jan Łukasiewicz, Alfred Tarski, Stanisław Jaskowski, axiomatic and matrices methods

W filozofii XX wieku intuicja zajmuje uprzywilejowane miejsce. Od pojawienia się Bergsonowskiej „intuicji czystego trwania” i Husserlowskiej „intuicji czystych istot” można mówić o nowym etapie rozwoju intuicjonizmu. O intuicji mówią najczęściej ci filozofowie, którzy przeświadczenia i odczucia stawiają wyżej niż uzasadnianie i sprawdzanie zdobywanej wiedzy. Przykładowo w estetyce intuicję często traktuje się jako kryterium rozumienia i oceny wartości estetycznych. W filozofii religii rolę intuicji wiąże się z aktem wiary. W filozofii tomistycznej znaczenie intuicji intelektualnej ma związek z poznawczym ujęciem rzeczywistości. O intuicyjnym poznaniu jest mowa także w matematyce i naukach realnych.

Filozoficzną problematykę intuicji nie łatwo jest uporządkować i opisać z powodu dużej różnorodności stanowisk filozoficznych, w których zagadnienie to jest ujmowane, ale także z powodu jego powiązania z ogólniejszą kwestią określenia natury poznania. Wskutek tego dotychczasowe rozwiązania licznych filozoficznych kwestii związanych z intuicją nie są zadawalające. Warto zatem sięgnąć do uściśleń i analiz intuicjonizmu matematycznego i logiki intuicjonistycznej, aby przekonać się, na ile prace te przyczyniły się do zrozumienia i oceny intuicjonizmu, początkowo entuzjastycznie przyjmowanego w wielu dziedzinach.

W niniejszym artykule pragnę zwrócić uwagę na próby budowania podstaw matematyki w pierwszej połowie XX wieku przez sięgnięcie do intuicjonistycznej logiki i matematyki. Mówiąc o logice intuicjonistycznej, mam na uwadze kierunek zapoczątkowany przez holenderskiego matematyka Luitzena Egbertusa Jana Brouwera. Rozwój tego nurtu nadal

oczekuje na pełne opracowanie historyczno-problemowe. W niniejszej prezentacji są wybrane jedynie te jego elementy, które dają obraz ówczesnych debat dotyczących ważności poznania intuicyjnego w matematyce i jej zastosowaniach do teorii fizycznych oraz rozwoju intuicjonizmu w pierwszej połowie XX wieku – kiedy wiązano z tym kierunkiem duże nadzieje na przebudowanie podstaw matematyki oraz sformułowanie założeń do budowy filozoficznej teorii rzeczywistości – uwzględniając badania polskich filozofów i logików, m.in. Zygmunta Zawirskiego, Jana Łukasiewicza, Alfreda Tarskiego, Stanisława Jaśkowskiego.

Brouwerowska krytyka matematyki klasycznej

Dla Brouwera matematyka nie jest dziedziną oderwaną od rzeczywistości. Zawiera określoną treść, zgodną z odpowiednio przez niego rozumianą intuicją matematyczną. Nie zgadzał się ani na tezę logistów, którzy chcieli matematykę sprowadzić do samej tylko logiki, ani też na tezę formalistów ze szkoły Hilberta, u których matematykę sprowadzano do rachunku w języku symboli matematycznych. Był przekonany, że podstawą arytmetyki i teorii mnogości jest intuicja naturalnego szeregu liczb i indukcja matematyczna, rozumiana jako zasada operacyjna stosowana w każdym dziale matematyki. Zdaniem Brouwera matematyka jest niezależna od języka matematycznego, od dowodów czysto formalnych. Podkreślał, że matematyka znajduje się w umyśle ludzkim, a nie na papierze. Nie można wyłącznie postulować istnienia obiektów matematycznych, należy je uprzednio skonstruować.

Logika podobnie powinna uwolnić się od swej językowej formy. Brouwer podkreśla, iż logika została wyabstrahowana z matematycznych zbiorów skończonych i bezprawnie przeniesiona na matematykę zbiorów nieskończonych. Wyłaniające się z teorii mnogości Georga Cantora paradoksy, antynomie doprowadziły do kryzysu w rozumieniu podstaw matematyki. Źródło błędów w matematyce widział Brouwer w dowodach nieodwołujących się do konstrukcji postulowanych obiektów, dlatego odrzucił wszelkie dowody niekonstruktywne logiki klasycznej. Podważył absolutne obowiązywanie prawa wyłączonego środka i prawa podwójnego przeczenia oraz krytycznie odniósł się do aksjomatu wyboru (aksjomatu Zermelo)¹.

1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „On the Foundations of Mathematics”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 74–97.

Matematyka dla Brouwera jest nauką o określonej treści, a dedukcja w niej przybiera formę dedukcji naturalnej odrzucającej metodę aksjomatyczną jako metodę budowania i ugruntowania matematyki². Zapewnienie skuteczności postępowania nie sprowadza się jedynie do postulowania istnienia obiektów matematycznych, lecz do uprzedniego ich skonstruowania³.

Brouwer zauważa, iż w matematyce w sposób nieostrożny operuje się terminem „wszystko” oraz bez ograniczeń stosuje się zasadę wyłączonego środka. Terminu „wszystko” nie należy używać w analizach zbiorów nieskończonych, oprócz zbiorów nieskończonych dobrze uporządkowanych, jak np. szeregu naturalnych liczb, gdyż w tych przypadkach można stosować zasadę indukcji. W przypadku natomiast szeregu miejsc dziesiętnych liczby przestępnej zastosowanie metody indukcji jest niemożliwe, gdyż w szeregu tym kolejne cyfry nie dają się ująć w żadne prawo. W tego typu wypadkach stosowanie zasady wyłączonego środka może prowadzić do zdań bezsensownych. Zasada ta głosi, iż albo przynajmniej jeden element nie posiada pewnej własności, albo wszystkie elementy tę własność mają. Oznacza to także, że zasada ta jest spełniona w sytuacji, gdy albo żaden element pewnej własności nie posiada, albo istnieje przynajmniej jeden element, który ma tę własność. W przypadkach pewnych zbiorów zasada alternatywy wykluczającej jest niedopuszczalna. Nie wolno na podstawie fałszywości ogólnego składnika alternatywy bezkrytycznie

2 Użycie nazwy „dedukcja naturalna” wydaje się uprawnione jedynie w zakresie podstawowych funktorów zdaniotwórczych. Są one jakby naturalnym łącznikiem zdań, będących elementami dowodów i formuł zdaniowych, a nie elementem reguł strukturalnych wnioskowań opisujących jedynie kształty wyrażeń dołączanych. Ściśle biorąc, idąc za Jaśkowskim, chodzi tu o stosunki pomiędzy kształtami tych wyrażeń dołączonych a kształtami przesłanek, wyrażeń wcześniej przyjętych. Stanisław Jaśkowski, *Elementy logiki matematycznej* [skrypt] (Toruń: 1947), 20.

3 Pod tym względem prace Brouwera korespondują z szeroko zakrojonymi rodzimymi, przeprowadzonymi w okresie pierwszej połowy XX wieku, badaniami dotyczącymi ujmowania rachunku zdań, formułowanych metodą dedukcji naturalnej. Przykładowo Józef Iwanicki, sięgając do prac Gentzena (Gerhard Gentzen, „Untersuchungen über das logische Schliessen”, *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934): 184) i Feysa (Robert Feys, „Les methodes de deduction naturelle”, *Revue Philosophique de Louvain* 44 (1946): 370; 45 (1947): 60), dokonuje porównania dedukcji naturalnej opartej na samych regułach strukturalno-dedukcyjnych, wykorzystując tzw. I i II odmianę gentzenowską z dedukcją logistyczną posługującą się, obok dyrektyw, aksjomatami (Józef Iwanicki, *Dedukcja naturalna i logistyka* (Warszawa: Nakładem Polskiego Tow. Teologicznego w Warszawie, 1949). Ważnymi w tym zakresie pozostają także prace A. Mostowskiego, *Logika matematyczna* (Andrzej Mostowski, *Logika matematyczna* (Warszawa–Wrocław: 1948), St. Jaśkowskiego, *Elementy logiki matematycznej* czy R. Suszki, *W sprawie logiki bez aksjomatów* (Roman Suszko, „W sprawie logiki bez aksjomatów”, *Kwartalnik Filozoficzny* 17 (1948): 199–205). Zagadnienia te zasługują na odrębne opracowanie i nie mieszczą się w problematyce podjętej w niniejszym artykule.

przyjmować prawdziwość sądu szczegółowego. O tym, czy sąd szczegółowy, egzystencjalny jest negacją zdania ogólnego, można przekonać się tylko drogą konstrukcji.

Wszędzie tam, gdzie istnieje dobre uporządkowanie elementów zbioru, ważna jest zasada indukcji matematycznej. Nie chodzi tu tylko o zbiory skończone, ale również o te, które są zbiorami nieskończonymi przeliczalnymi o mocy alef-zero. Dla tych zbiorów obowiązują zasady logiki klasycznej. Wydaje się ważne spostrzeżenie, że gdy mamy do czynienia z niewielką ilością przedmiotów, logika w zasadzie jest niepotrzebna. Z chwilą jednak, gdy rozpatrujemy ilość przedmiotów nieskończoną, albo skończoną, ale tak dużą, że pojawiają się trudności eksperymentalnego sprawdzania ich własności, wówczas logika staje się konieczna do zastosowania.

W kierunku intuicjonizmu matematycznego i logiki intuicjonistycznej

Koncepcję języka opartą na ogólnych założeniach filozoficznych Brouwer sformułował już w 1905 roku, w artykule *Life, Art and Mysticism*⁴, jeszcze przed ogłoszeniem programu intuicjonistycznej matematyki, który przedstawił w pracy *On the Foundations of Mathematics*⁵. Badając język matematyki, Brouwer przyjął niezawodność bezpośredniego doświadczenia wewnętrznego (intuicji). Analizował procesy, których mentalną reprezentację stanowi system matematyczny. Badał także takie struktury formalne, które mogą odzwierciedlać relacje zachodzące w rzeczywistości. Postulował skonstruowanie takiego wspólnego matematycznego systemu, z pojęciami którego każdy wiązałby te same obiekty, a efektywność wzajemnego rozumienia skłaniałaby do wyboru najlepszego takiego systemu. Ponieważ zbudowanie takiego wspólnego dla wszystkich systemu nie jest możliwe, dlatego, mając na uwadze cele praktyczne, członkom pewnych grup narzucane są wspólne systemy matematyczne.

Brouwer, odwołując się do niezawodności bezpośredniego doświadczenia wewnętrznego, zdefiniował i analizował dwa wymiary intuicjonizmu, z których pierwszy prowadzi do destrukcyjnych i oczyszczających

4 Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „Life, Art and Mysticism”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, T. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 1–9.

5 Brouwer, „On the Foundations of Mathematics”, 12–101.

matematykę konsekwencji, natomiast drugi daje szerokie możliwości dla matematycznych odkryć i nowych rozwiązań. Ten pierwszy wymiar intuicjonizmu, który można potraktować jako definicję matematyki intuicjonistycznej, całkowicie oddziela matematykę od jej języka⁶. W matematycznym myśleniu pojawia się intuicja czystej dwu-jedności, dzięki której jest możliwe kreowanie wszystkich skończonych liczb porządkowych⁷. Ta podstawowa intuicja matematyczna prowadzi bezpośrednio do intuicyjnego ujęcia liniowego kontinuum. Najpełniej przedstawił to w artykule *Intuitionism and Formalism*, gdzie okazał, jak na podstawie powyższej intuicji dają się rozwijać działy matematyki, w których wykorzystuje się skończoną ilość kombinacji dwóch operacji, łączenia i rozdzielania, co prowadzi do stworzenia skończonej liczby porządkowej i stworzenia najmniejszej liczby porządkowej pozaskończonej. W konstrukcji tych zbiorów ani język potoczny, ani symboliczny nie mogą odgrywać żadnej innej roli, jak tylko rolę pomocniczego środka matematycznego w konstruowaniu odpowiednich zbiorów⁸.

W drugim wymiarze intuicjonizmu dostrzega się możliwość konstruowania nowych obiektów matematycznych⁹. Oznacza to, że w trakcie rozwoju matematyki intuicjonistycznej niektóre obiekty matematyczne

6 „[...] the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics”. Brouwer, „Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism”, 510.

7 Intuicja czystej dwujedności jest podstawową intuicją matematyczną, szerzej na ten temat zobacz w dalszej części artykułu.

8 Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „Intuitionism and Formalism”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 20/2 (1913): 85–96.

9 „firstly in the form of infinitely proceeding sequences $p_1, p_2, \dots$, whose terms are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired; in such a way that the freedom of choice existing perhaps for the first element p_1 may be subjected to a lasting restriction at some following p_v , and again and again to sharper lasting restrictions or even abolition at further subsequent p_v 's, while all these restricting interventions, as well as the choices of the p_v 's themselves, at any stage may be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject; secondly in the form of mathematical species, i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it, relations of equality having to be symmetric, reflexive and transitive; mathematical entities previously acquired for which the property holds are called elements of the species”. Brouwer, „Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism”, 511.

będą musiały być ponownie zdefiniowane, ponadto obiekty te mogą być elementami innych obiektów, ale nigdy własnym elementem.

Poglądy Brouwera budziły żywe zainteresowanie matematyków i logików, a zaproponowana przez niego matematyka intuicjonistyczna miała swoje dalsze rozwinięcia. Z dobrym opracowaniem logiki intuicjonistycznej Brouwera spotykamy się u jego ucznia Arenda Heytinga w pracy *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* z 1930 roku, gdzie sformułował jedenaście aksjomatów teorii zdań logiki intuicjonistycznej¹⁰. Z próbą tej systematyzacji nie zgadzał się Brouwer, uważał bowiem, iż nie można tej logiki opierać na aksjomatach. Z takim poglądem można się zgodzić, gdyż, jak wiemy, liczba zdań stanowiących podstawę systemu może być dowolna, zależy to od tego, jakie zdania wybieramy za podstawę systemu i jakie przyjmujemy terminy pierwotne¹¹, ponadto Brouwer bliższy był badaniom logiki intuicjonistycznej metodą dedukcji naturalnej. Zauważamy również, że równoległe do logiki intuicjonistycznej prowadzone były prace, które także odchodziły od klasycznej matematyki i logiki dwuwartościowej.

Logika intuicjonistyczna w badaniach logików polskich

Logika Brouwera rozszerzona do tzw. logiki Brouwera-Heytinga nie jest zwykłą logiką dwuwartościową, w której każde zdanie może mieć wartość prawdy albo fałszu. Ponieważ nie można wykazać bezwzględnej prawdziwości zasady wyłączonego środka, ale, jak stwierdzono, nie jest ona także fałszywa, dlatego przyjmuje się trzecią wartość, wartość pośrednią $\frac{1}{2}$. Heyting przyjął, że negacją tej wartości jest fałsz. W interpretacji Zawirskiego pojawienie się owej trzeciej wartości ukazuje logikę Brouwera-Heytinga jako logikę trójwartościową¹².

Warto podkreślić, że w 1920 roku Jan Łukasiewicz, choć na zupełnie odmiennym podłożu – indeterministycznego poglądu na bieg

10 Arend Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Berlin: Deütsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1930).

11 Przykładowo, prawa logiki tradycyjnej dają się wyprowadzić z czterech, trzech, a nawet jednego aksjomatu. Jean Nicod w 1917 roku próbował całą logikę sprowadzić do jednego aksjomatu. Inne próby były podejmowane przez Łukasiewicza i Tarskiego w 1930 oraz Sobocińskiego w 1932. Jeśli za terminy pierwotne przyjmujemy symbole negacji i implikacji, to, jak wykazał Łukasiewicz, trzeba przyjąć trzy aksjomaty, natomiast przy wyborze negacji i alternatywy trzeba przyjąć cztery aksjomaty, jak zostało to wykazane przez Alfreda Northa Whiteheada i Bertranda Russella w *Principia Mathematica*.

12 Zygmunt Zawirski, „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, *Kwartalnik Filozoficzny* 16 (1946): 165–222.

zdarzeń – zbudował system logiki trójwartościowej¹³. Obok wartości prawdy i fałszu przyjął wartość logiczną „możliwość”¹⁴. Pomimo znaczących różnic między logiką trójwartościową Łukasiewicza a intuicjonistyczną Brouwera można jednak dostrzec między nimi pewne punkty styczne¹⁵. W logice Łukasiewicza zasada wyłączonego środka i zasada sprzeczności przestają być prawdziwe, co nie oznacza, że są fałszywe, lecz są tylko możliwe (mówiąc dokładniej, dla wartości $\frac{1}{2}$ zasady te mają wartość $\frac{1}{2}$, co znaczy, że nie dla wszystkich wartościowań formuł, które są tautologiami, uzyskuje się końcową wartość prawdziwości). W logice Brouwera mamy podobną sytuację z tym, że zasada wyłączonego środka nie jest w niej fałszywa, ale nie można też wykazać jej prawdziwości. Ponadto formuły prawdziwe w logice klasycznej nie mogą być fałszywe w systemie Brouwera. Natomiast pewne formuły prawdziwe w logice klasycznej są w logice Łukasiewicza tylko możliwe, ale niektóre – wręcz fałszywe. Biorąc powyższe pod uwagę, Zawirski stwierdza, iż logika Brouwera jest bliższa intuicji niż Łukasiewicza logika trójwartościowa¹⁶.

Zygmunt Zawirski w pracy *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej* zestawiał matryce negacji, implikacji, alternatywy i koniunkcji zarówno dla logiki Brouwera-Heytinga, jak i Łukasiewicza logiki trójwartościowej. Po ich porównaniu i przedyskutowaniu wartości ukazywanych w poszczególnych matrycach okazało się, że o ile w logice dwuwartościowej między podstawowymi pojęciami negacji, sumy, iloczynu i implikacji zachodzą związki, dzięki którym można którąkolwiek z nich wyrazić za pomocą iloczynu względnego dwu innych lub też wprost zdefiniować jedną przy pomocy drugiej, o tyle nie można tego wykonać w logice Brouwera-Heytinga. Wyjściem z tej trudnej sytuacji była możliwość wyboru budowania teorii dedukcyjnej albo metodą aksjomatyczną, albo

13 Jan Łukasiewicz, „O logice trójwartościowej”, *Ruch Filozoficzny* 5 (1920): 170–171.

14 *Idem*, „O pojęciu możliwości”, *Ruch Filozoficzny* 5 (1920): 169–170.

15 Do logiki intuicjonistycznej Łukasiewicz odniósł się po raz pierwszy w 1928 roku, wygłaszając odczyt na drugim międzynarodowym zjeździe matematyków w Bolonii. Logice intuicjonistycznej poświęcił dwie prace: Jan Łukasiewicz, „Die Logik und das Grundlagenproblem”, *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques* 12/6-9 (1938) [(Zürich, 1941): 82–100]o oraz Jan Łukasiewicz, „O intuicjonistycznym rachunku zdań”, w *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, red. Jan Ślupecki (Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961), 261–274.

16 Warto zwrócić uwagę na porównanie systemu logiki Brouwera-Heytinga z systemem Łukasiewicza logiki trójwartościowej, które poddał szczegółowej analizie Zygmunt Zawirski w: Zawirski, „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, 165–222; oraz Tadeusz Czeżowski, *Logika. Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne* (Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Szkolnych, 1948), 69–77.

metodą matrycową¹⁷, przy spełnieniu warunku normalności matrycy¹⁸. Ponieważ, jak zauważył Heytinga, żadnego z czterech podstawowych pojęć nie można wyrazić przy pomocy innego ani przedstawić w postaci iloczynu względnego dwóch ani nawet trzech pozostałych pojęć, dlatego obrał metodę aksjomatyczną w opracowaniu logiki intuicjonistycznej. Po zbudowaniu zdań tą metodą użył metody matrycowej jako środka do badania, jakie twierdzenia są w danym systemie prawdziwe, niezależnie od konstrukcji teorii metodą aksjomatyczną. Okazało się jednak, że tylko niektóre z praw logiki dwuwartościowej są prawdziwe w logice intuicjonistycznej, inne okazują się tylko jako możliwe, uzyskując wartość $\frac{1}{2}$. Pełne zrozumienie logiki Brouwera-Heytinga można uzyskać dopiero wówczas, kiedy porównamy jej matryce z matrycami Łukasiewicza logiki trójwartościowej¹⁹.

W 1952 roku w artykule *O intuicjonistycznym rachunku zdań* Łukasiewicz podjął bardzo ambitne zadanie porównania logiki intuicjonistycznej z logiką klasyczną oraz wykazania, iż logika klasyczna zawiera się w logice intuicjonistycznej. Bazując na wypracowanej przez siebie beznawiasowej notacji, w którą wprowadza odmienne oznaczenia C i F dla funktorów implikacji klasycznej i intuicjonistycznej, symboli K i T – dla koniunkcji klasycznej i intuicjonistycznej oraz symboli A i O – dla alternatywy klasycznej i intuicjonistycznej a dla negacji zarówno klasycznej, jak i intuicjonistycznej – symbol N²⁰, opracowuje system dziesięciu aksjomatów intuicjonistycznego rachunku zdań. Po przeprowadzonych analizach i opracowaniu wielu definicji Łukasiewicz żywił przekonanie, iż potwierdził tezę, że klasyczny rachunek zdań stanowi podsystem intuicjonistycznego rachunku zdań. Należy jednak zgodzić się z wysuniętymi przez Bożenę Czarnecką zastrzeżeniami dotyczącymi uzasadnienia wysuniętej przez Łukasiewicza tezy. Na uwagę zasługu-

17 Czeżowski, *Logika. Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne*, 65–69.

18 Problematykę tę wcześniej opracował Alfred Tarski w: „Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych”, w *Pisma logiczno-filozoficzne. Metalogika*, t. II, red. Jan Zygmunt (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001), 51–60ö oraz: Alfred Tarski, „Badania nad rachunkiem zdań”, w *Pisma logiczno-filozoficzne. Metalogika*, t. II, red. Jan Zygmunt (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001), 7–14. Warunek normalności matrycy ogranicza możliwość formułowania matryc przez formułowanie matryc nienormalnych, fantastycznych formuł, które nie zasługiwałyby na miano logiki.

19 Krzysztof Śleziński, *Towards Scientific Metaphysics*, t. 1: *In the Circle of the Scientific Metaphysics of Zygmunt Zawirski. Development and Comments on Zawirski's Concepts and their Philosophical Context*, Polish Contemporary Philosophy and Philosophical Humanities, t. 15, red. Jan Hartman (Berlin: Wyd. Peter Lang, 2019), 61–66.

20 Łukasiewicz, „O intuicjonistycznym rachunku zdań”, 281–285.

je szczególnie dołączona do rachunku intuicjonistycznego definicja 63 ($F\delta NTpNq\delta Cpq$, gdzie δ jest zmienną przebiegającą funktry), która, zdaniem Czarneckiej, prowadzi do zmiany jej sensu na gruncie logiki klasycznej²¹. Zdaniem jednak Łukasiewicza funktry C wprowadzony przez definicję 63 ma wszystkie własności klasycznej implikacji, dlatego można się nim posłużyć w dowodzeniu twierdzeń. Pozostaje jednak słusznie dostrzeżona wątpliwość, czy to poszerzenie intuicjonistycznego rachunku o definicję 63 jest dobrze pojmowane przez Łukasiewicza. Jeśli za zmienną funktry δ we wspomnianej definicji można byłoby podstawiać wyłącznie funktry prawdziwościowe, Łukasiewicz miałby rację w uzasadnieniu swej tezy. Stephan Körner, odwołując się jednak do semantyki formalnej dla intuicjonistycznego rachunku zdań opracowanego przez Kripkego, jest zdania, iż analiza funktry logiki intuicjonistycznej zdaje się wskazywać, iż nie są to funktry prawdziwościowe²².

W wyniku badań nad logiką intuicjonistyczną zaczęto stopniowo ujawniać pewne jej wady. Okazało się, że maczyca implikacji sformułowana przez Heytinga jest nieadekwatna. Spełniają ją nie tylko wcześniej sformułowane przez Heytinga aksjomaty i tezy z nich wynikające, ale również i takie formuły, które z tych aksjomatów nie wynikają. W systemie Heytinga przykładowo da się udowodnić prawo, że zasada wyłączonego środka implikuje lewostronne prawo podwójnej negacji, lecz twierdzenie odwrotne nie zachodzi. Chociaż w systemie tym mamy do czynienia z inferencyjną równoważnością tych dwóch zasad, to jednak jest to tylko inferencyjna równoważność. W systemie tym nie obowiązuje formuła równoważności między zasadą wyłączonego środka i zasadą lewostronnej podwójnej negacji. Mimo tego, że z zasady wyłączonego środka wynika implikacyjnie zasada lewostronnej podwójnej negacji, to jednak nie zachodzi implikacja odwrotna. Tymczasem w macyzy Heytinga obowiązują obie formuły implikacji. Stało się oczywiste, że maczyca ta musi ulec poprawie.

Dalsze badania nad macyzami doprowadziły do wykazania, iż żadna maczyca o skończonej ilości wartości nie może być dla logiki Brouwera-Heytinga adekwatna. Zawsze można znaleźć taką formułę logiczną, niewynikającą z aksjomatów tej logiki, którą maczyce sprawdzające aksjomaty będą ją również sprawdzały²³. Dowód tego został przedstawiony przez

21 Bożena Czarnecka, „Jana Łukasiewicza ujęcie intuicjonistycznego rachunku zdań”, *Rocznik Filozoficzny* 48-1 (2000): 231–237.

22 Stephan Körner, *What is Philosophy? One Philosopher's Answer* (London: Wydawnictwo Allen Lane, 1969), 65.

23 Kurt Gödel, „Zum intuitionistischem Aussagenkalkül”, *Academie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 69 (1932): 65–66.

Kurta Gödla w 1932 roku. Przedstawił sumę logiczną równoważności zachodzących między zmiennymi zdaniowymi. Każda matryca zawierająca mniej niż n wartości, dla której spełnione są aksjomaty Heytinga, będzie spełniać tak zbudowaną formułę, która jest niezależna od aksjomatów logiki intuicjonistycznej. Oznacza to, że jeśli w matrycy wartości aksjomaty spełniają się dla n wartości, to formuła skonstruowana przez Gödla będzie również spełniona, ale pod warunkiem że ilość zmiennych zdaniowych będzie większa od n . Zatem matryca adekwatna dla logiki Heytinga musi być nieskończenie wielowartościowa. Prawa logiki Heytinga spełniają się dla nieskończonego ciągu skończonych matryc o ciągle rosnącej ilości wartości. Oznacza to, że żadna matryca nie jest adekwatna dla systemu Heytinga oraz że pomiędzy tym systemem a systemem zwykłego rachunku zdań istnieje nieskończenie wiele systemów, w których zawiera się logika Heytinga, a które są z kolei zawarte w logice dwuwartościowej²⁴.

Pod znakiem zapytania stała Brouwera reforma matematyki. Okazało się, że aksjomaty i opracowane matryce Heytinga nie wyznaczają tego samego systemu – jak zatem można tę niezgodność pokonać? Rozwiązanie tego problemu podał w 1935 roku Stanisław Jaśkowski podczas Międzynarodowego Kongresu Filozofii Naukowej. Publikacja z tego wystąpienia ukazała się rok później²⁵. Zbudowane przez Jaśkowskiego matryce adekwatne dla systemu Heytinga okazały się bardzo skomplikowane. Matryce te mają także rozbudowywane rozgałęzienia boczne, a każde rozgałęzienie dostarcza nieskończonego ciągu matryc. Zatem, jeżeli uwzględniamy wartości wyróżnione w poszczególnych matrycach, to okazuje się, że kiedy wprowadzamy określoną funkcję, gdzie jej argument ma wartość wyróżnioną, to jej wartością staje się nowa wartość, której w poprzedniej matrycy nie było. Dzięki tej funkcji można formułować ogólną tabelę, na podstawie której możliwa jest budowa danej matrycy, gdy znamy budowę matrycy ją poprzedzającej²⁶.

Dzięki zastosowaniu wprowadzonej przez Jaśkowskiego funkcji otrzymujemy szereg nowych wartości, zbliżając się tym samym do prawdy, która jest granicą szeregu naturalnego liczb, a którym przypisujemy

W przeprowadzonym dowodzie Gödel pośrednio wykorzystał to, co później stało się znane jako logika pośrednia Gödla-Dummeta. Utworzył formułę będącą sumą logiczną ze wszystkich równoważności zachodzących między zmiennymi zdaniowymi.

24 Zawirski, „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, 205–206.

25 Stanisław Jaśkowski, „Recherches sur le système de la logique intuitioniste”, w *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, t. VI: *Philosophie des mathématiques, Actualités scientifiques et industrielles* 393 (Paris: Hermann & Cie, 1936), 58–61.

26 Zawirski, „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, 207–217.

odpowiednio wprowadzane wartości. Wykrycie przez Jaśkowskiego nowych sposobów tworzenia matryc spełniło oczekiwania wobec systemu Heytinga i tym samym otworzyło kolejną perspektywę badań logik parakonsystentnych, w których zwrócono uwagę na rozumienie parakonsystentnej negacji²⁷. W tym miejscu pojawiają się kolejne zagadnienia dotyczące m.in. możliwości utrzymania klasycznego pojęcia sprzeczności przy jednoczesnym odrzuceniu wynikania dowolnego zdania z pary zdań sprzecznych, zgodnie z zasadą *ex contradictione sequitur quodlibet*²⁸. Z kolei systemowe opracowanie logiki dialektycznej przez Benedykta Bornsteina pozwoliło w inny sposób niż w dotychczas znanych opracowaniach logiki spojrzeć na zasadę sprzeczności i porównać ją z zasadą sprzeczności logiki klasycznej. Zagadnienie to zostało podjęte przez Bornsteina w pracy *Zarys teorii logiki dialektycznej* z 1948 roku²⁹.

Biorąc powyższe pod uwagę, nie można kategorycznie stwierdzić, iż logika intuicjonistyczna była jedynie historycznym epizodem w próbach budowania systemów dedukcyjnych (a także w rozwoju topologii). Prace Brouwera, w tym twierdzenie o punkcie stałym³⁰, znalazło zastosowanie m.in. w analizach nieliniowych, teorii gier, ekonomii – w teorii równowagi rynkowej czy fizyce – w badaniu zachowania układów dynamicznych i przejść fazowych. Zauważamy także dalszą kontynuację myśli zapoczątkowanej przez Brouwera w rozwoju logik parakonsystentnych i jej zastosowaniu w postaci użytecznego narzędzia w teorii toposów. Ponadto dzięki m.in. Alfredowi Tarskiemu w pracy *Rachunek zdań i topologia* otworzyła się perspektywa badań topologicznych systemów intuicjonistycznych³¹. W tej pracy Tarski przeanalizował metodą matrycową zdania

27 Graham Priest, Richard Routley, Jean Norman, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent* (Wien: Philosophia Verlag, München-Hamden, 1989).

28 Krystyna Misiuna, „O obliczach sprzeczności”, *Filozofia Nauki* 43/3 (2010): 55–78.

29 Benedykt Bornstein, „Zarys teorii logiki dialektycznej”, w: *Benedykta Bornsteina niepublikowane pisma z teorii poznania, logiki i metafizyki. Wybór i opracowanie oraz wprowadzenie i komentarze*, red. Krzysztof Śleziński (Katowice: Uniwersytet Śląski, 2014), 128–190.

30 Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym głosi, że każda ciągła funkcja odwzorowująca zamkniętą jednostkową kulę przestrzeni euklidesowej w siebie ma punkt stały. Dowód twierdzenia o punkcie został opublikowany przez Brouwera w: Luitzen Egbertus Jan Brouwer, „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen* 71 (1912): 97–115. Obecność myśli Brouwera w badaniach topologicznych w zestawieniu z pracami Kuratowskiego i Mazurkiewicza zob. m.in.: Sehie Park, *Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem*, „Vietnam Journal of Mathematics” 27/3 (1999): 187–222.

31 Tarski, „Rachunek zdań i topologia”, 158–200.

dowodliwe³² zarówno w rachunku dwuwartościowym, jak i w rachunku intuicjonistycznym. Ponadto zaprezentował interpretację rachunku dwuwartościowego oraz rachunku intuicjonistycznego w teorii krat. Prace Tarskiego dały impuls do rozwoju wielu działów matematyki, ale także dostarczyły narzędzi do formalizacji logiki.

Mimo sceptycyzmu Brouwera co do stworzonego przez Heytinga systemu i prób kodyfikacji logiki intuicjonistycznej, rozwijała się ona mimo tych zastrzeżeń, doprowadzając do wielu wartościowych wyników przewyżających trudności w budowaniu intuicjonistycznych systemów logiki i matematyki, a tym samym przyczyniających się do ich zastosowań w wielu obszarach matematyki i zmatematyzowanych nauk empirycznych.

Bibliografia

Książki i monografie

- Czeżowski Tadeusz, *Logika. Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne* (Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Szkolnych, 1948).
- Heyting Arend, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Berlin: Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1930).
- Iwanicki Józef, *Dedukcja naturalna i logistyka* (Warszawa: Nakładem Polskiego Tow. Teologicznego w Warszawie, 1949).
- Körner Stephan, *What is Philosophy? One Philosopher's Answer* (London: Wydawnictwo Allen Lane, 1969).
- Kuiper Johannes John Carel, *Ideas and Explorations. Brouwer's Road to Intuitionism* (Utrecht: Uniwersytet Utrecht, 2004).
- Mostowski Andrzej, *Logika matematyczna* (Warszawa–Wrocław: 1948).
- Murawski Roman, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów* (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe UAM, 1995).
- Priest Graham, Richard Routley, Jean Norman, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent* (Wien: Philosophia Verlag, München–Hamden, 1989).
- Śleziński Krzysztof, *Towards Scientific Metaphysics*, t. 1: *In the Circle of the Scientific Metaphysics of Zygmunt Zawirski. Development and Comments on Zawirski's Concepts and their Philosophical Context*, Polish Contemporary Philosophy and Philosophical Humanities, t. 15, red. Jan Hartman (Berlin: Wyd. Peter Lang, 2019).

32 Systemem zdań dowodliwych danego rachunku zdaniowego jest najmniejszy system zdań, który zawiera aksjomaty tego rachunku i jest zamknięty na operację odrywania. Tarski, „Rachunek zdań i topologia”, 161.

Rozdziały w monografiach

- Bornstein Benedykt, „Zarys teorii logiki dialektycznej”, w *Benedykta Bornsteina niepublikowane pisma z teorii poznania, logiki i metafizyki. Wybór i opracowanie oraz wprowadzenie i komentarze*, red. Krzysztof Śleziński (Katowice: Uniwersytet Śląski, 2014), 128–190.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Consciousness, Philosophy and Mathematics”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 480–481.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 508–515.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Life, Art and Mysticism”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 1–9.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Mathematik, Wissenschaft und Sprache”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 417–428.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „On the Foundations of Mathematics”, w *Collected Works. Philosophy and Foundations of Mathematics*, t. I, red. Arend Heyting (Amsterdam–Oxford–New York: North-Holland Publishing Company; American Elsevier Publishing Company, 1975), 12–101.
- Jaśkowski Stanisław, „Recherches sur le système de la logique intuitioniste”, w *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, t. VI: *Philosophie des mathématiques, Actualités scientifiques et industrielles* 393 (Paris: Hermann & Cie, 1936), 58–61.
- Jaśkowski Stanisław, *Elementy logiki matematycznej* [skrypt] (Toruń: 1947).
- Łukasiewicz Jan, „O intuicjonistycznym rachunku zdań”, w *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, red. Jan Ślupecki (Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1961), 261–274.
- Piotrowska Ewa, „Filozoficzne podstawy intuicjonizmu matematycznego w ujęciu L.E.J. Brouwera”, w *Z zagadnień nad filozoficznymi podstawami nauk*, red. Stefan Kaczmarek (Poznań: Wydawnictwo Nauk. Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, 1981), 113–171.
- Tarski Alfred, „Badania nad rachunkiem zdań”, w *Pisma logiczno-filozoficzne. Metalogika*, t. II, red. Jan Zygmunt (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001), 7–14.
- Tarski Alfred, „Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych”, w *Pisma logiczno-filozoficzne. Metalogika*, t. II, red. Jan Zygmunt (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001), 51–60.

Czasopisma

- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Intuitionism and Formalism”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 20/2 (1913): 85–96.
- Brouwer Luitzen Egbertus Jan, „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen* 71 (1912): 97–115.
- Czarnecka Bożena, „Jana Łukasiewicza ujęcie intuicjonistycznego rachunku zdań”, *Rocznik Filozoficzny* 48/1 (2000): 231–237.
- Feys Robert, „Les methodes de deduction naturelle”, *Revue Philosophique de Louvain* 44 (1946): 370–400.
- Feys Robert, „Les methodes de deduction naturelle”, *Revue Philosophique de Louvain* 45 (1947): 60–72.
- Gentzen Gerhard, „Untersuchungen über das logische Schliessen”, *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934): 176–210.
- Gödel Kurt, „Zum intuitionistischem Aussagenkalkül”, *Academie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 69 (1932): 65–66.
- Łukasiewicz Jan, „Die Logik und das Grundlagenproblem”, *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques* 12/6–9 (1938) [Zürich, 1941]: 82–100.
- Łukasiewicz Jan, „O logice trójwartościowej”, *Ruch Filozoficzny* 5 (1920): 170–171.
- Łukasiewicz Jan, „O pojęciu możliwości”, *Ruch Filozoficzny* 5 (1920): 169–170.
- Misiuna Krystyna, „O obliczach sprzeczności”, *Filozofia Nauki* 43/3 (2010): 55–78.
- Park Sehie, *Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem*, „Vietnam Journal of Mathematics” 27/3 (1999): 187–222.
- Suszek Roman, „W sprawie logiki bez aksjomatów”, *Kwartalnik Filozoficzny* 17 (1948): 199–205.
- Zawirski Zygmunt, „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, *Kwartalnik Filozoficzny* 16 (1946): 165–222.

